Gradients

강의명: 소성가공이론 (AMB2022)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

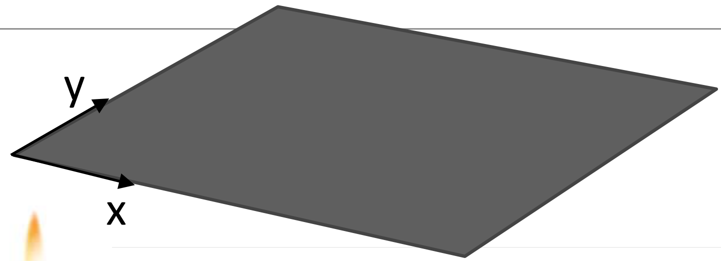
연구실: #52-212　전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Mathematical Prerequisites

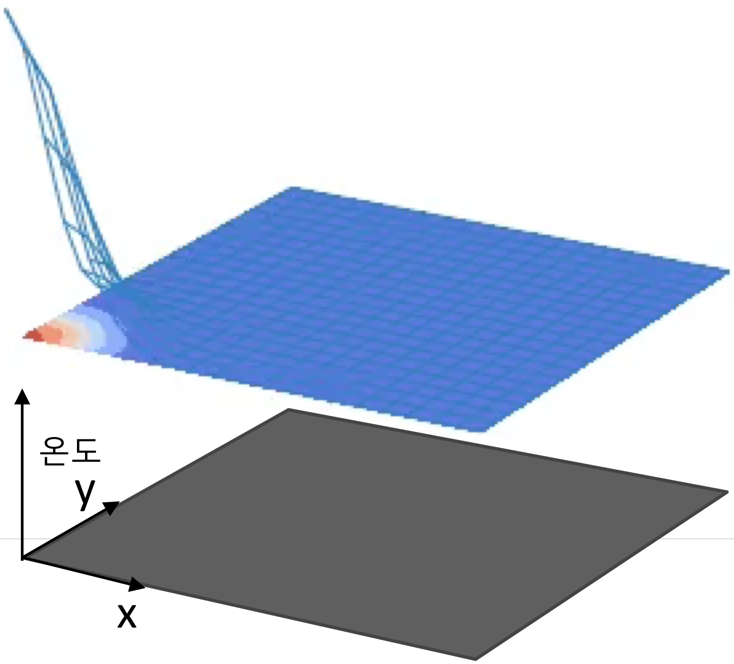
- Some Mathematical prerequisites
  - Differential equations (미분 방정식)
  - Scalars (scalar is a special case of tensor;)
  - Vectors (and possibly tensors; actually vector is a special case of tensor)
  - Coordinate systems (Rectangular, Cylindrical, Spherical)
  - Gradient of a scalar field (or a vector/tensor field)
- Field variable
  - A field is a physical quantity represented by a number (vector/tensor), that has a (set of) value(s) for each point in space and time.

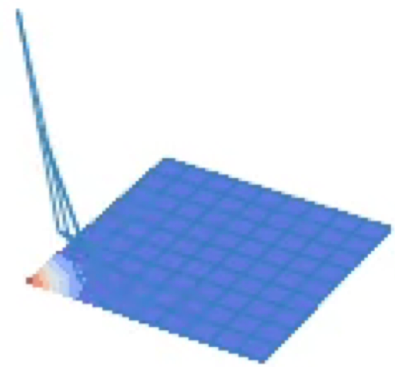
Scalar Gradient; Vector Gradient



두께가 매우 얇은 금속 판, 따라서,
두께 방향으로의 온도 차이가 없다.

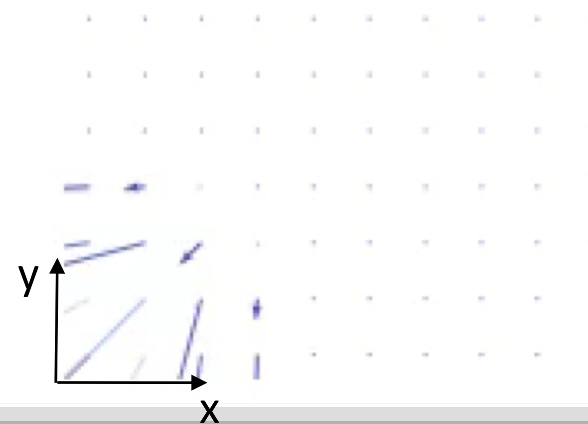
Heat source (열원)



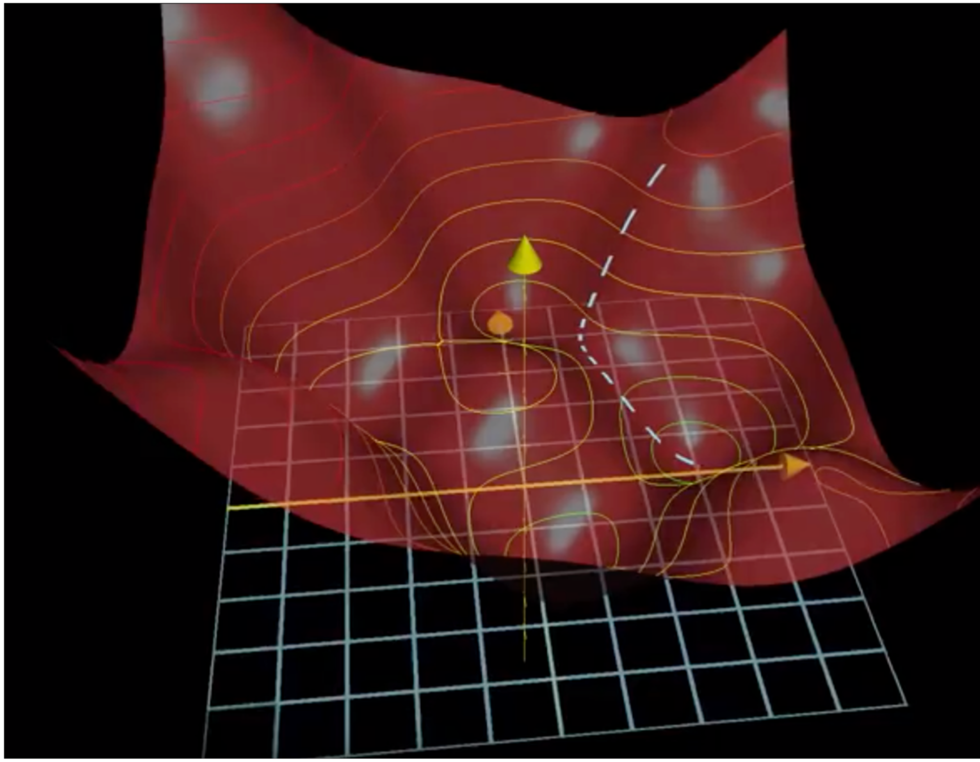


Temperature gradient: $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}}\right)$

Temperature gradient itself is a field variable
온도 구배 자체가 공간(여기서는 x,y space)에
따라 다른 값을 가질 수 있다.



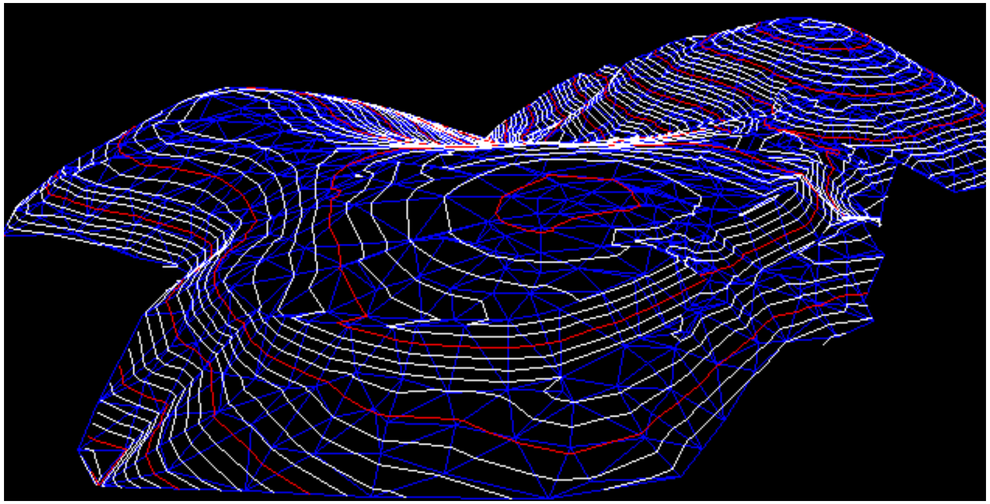
온도의 변화가 가장 급한 방향?



- 온도의 변화가 가장 급한 방향이 열전달의 반대 방향
- 농도의 변화가 가장 급한 방향이 확산의 반대 방향
- (비유), 부드럽게 굽어진 산(mountain)에서 공을 내려놨을 때 공이 중력에 의해서 움직이는 방향은 가장 경사가 급한게 올라가는 방향과 정반대 방향이다.
- Scalar potential gradient는 해당 scarlar가 가장 급하게 낮아지는 방향의 반대 방향.

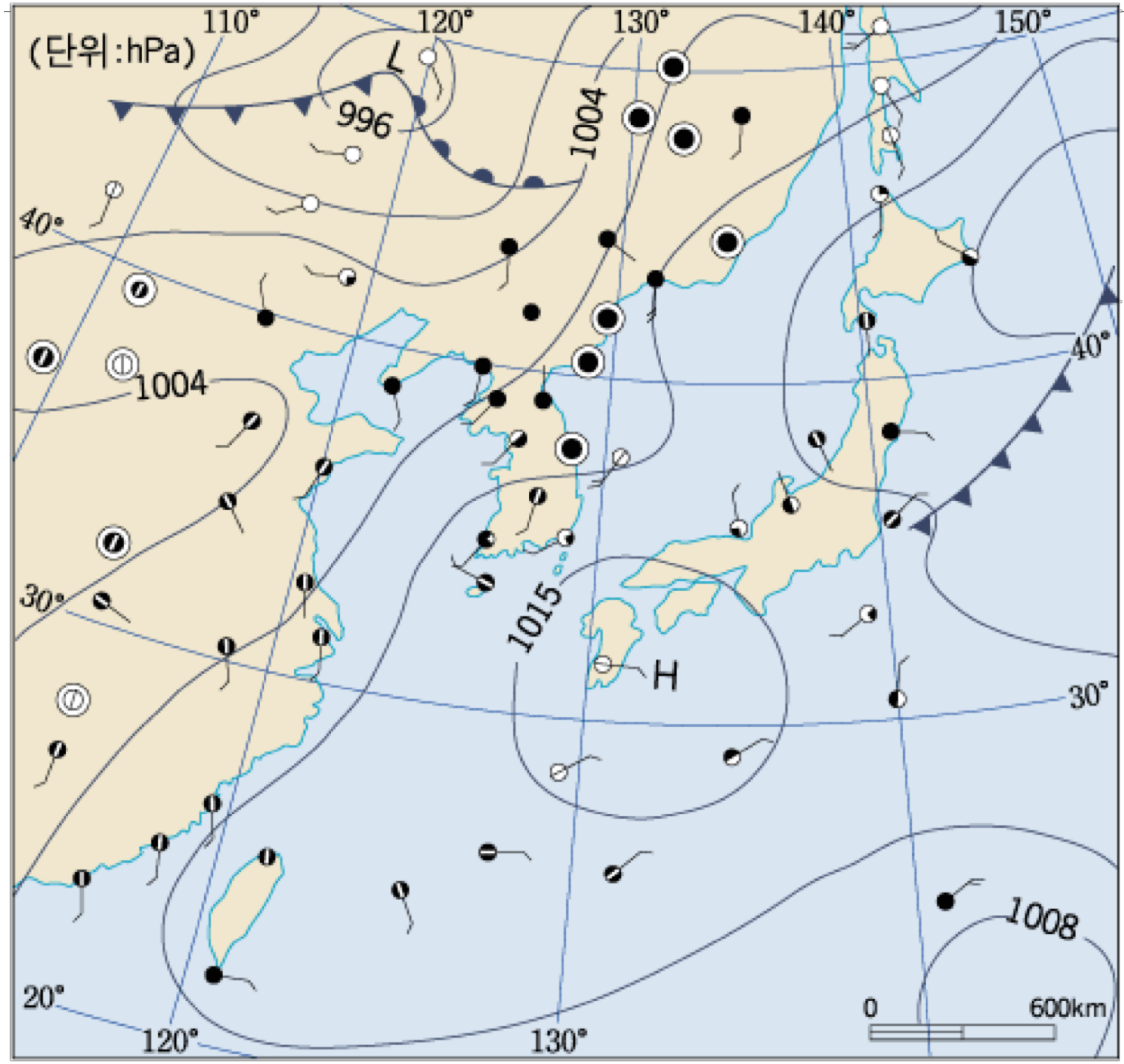
산등성이를 내려오는 공?

등고선 (contour line)



https://ko.wikipedia.org/wiki/등고선#/media/File:Digitales_Geländemodell.png

일기도의 예



압력: scalar
바람: Vector (세기, 방향)

둘 다, 위치(공간)에 따라서 달라질 수 있다. 따라서, field variable.

바람은 압력(기압)이 높은 곳에서 낮은 곳으로.

(아마도, 내 짐작으로는) 압력의 Gradient는 바람과 밀접한 관계가 있을 듯 – 압력이 가장 급하게 높아지는 방향의 정반대 방향으로 바람이 불지 않을까?

성분 분해

- 벡터 성분
- 벡터 성분은 '주어진 좌표'(임의로 설정한 **직각** 좌표계)의 각 단위 방향 (x,y,z)에서의 세기 혹은 크기를 표현한다.
- 직각 좌표계의 각 단위 방향은 서로 '독립적'이다.
- 벡터 성분들은 서로 '독립적이다'.
- 앞으로 살펴볼 물리량들도 성분으로 분해하여 설명한다.
- 앞으로 살펴볼 물리 현상의 수학적 모형들도, 서로 직각한 '성분'으로 살펴본다.
- 독립적인 성분들 개개가 독립적인 변수로 나타나는 미분 방정식을 얘기할 수도 있다.

Differential equations including gradients

$$dq \propto -\frac{\partial T}{\partial x}$$

T: temperature (field variable)

$$d\boldsymbol{q} \propto -\nabla\vec{T} = \frac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}} + \frac{\partial T}{\partial y}\overrightarrow{\boldsymbol{e_y}} + \frac{\partial T}{\partial z}\overrightarrow{\boldsymbol{e_z}}$$

$$d\boldsymbol{q}_i = -k_{ij}\nabla T_j$$

Flow rule

$$d\varepsilon = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}$$

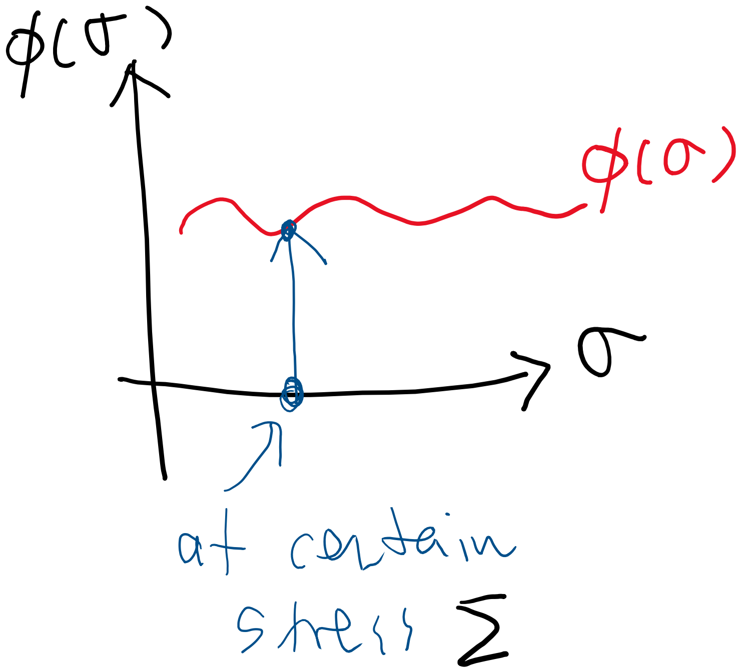
ϕ: *plastic potential*
λ: *plastic multiplier*
ε: *strain*
σ: *stress*

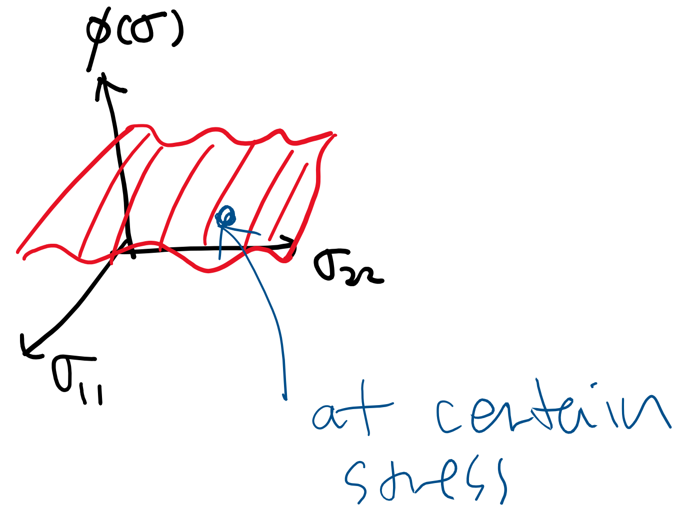
Stress and strain are tensors; with multiple 'independent' components.

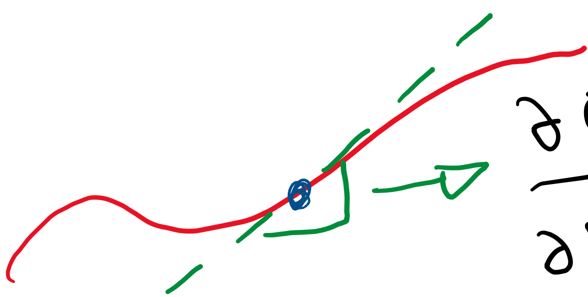
$$d\varepsilon_i = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_i}$$

https://ko.wikipedia.org/wiki/등고선#/media/File:Digitales_Geländemodell.png

Flow rule







$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}(\sigma = \Sigma)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{22}}\right)$$

Excel demonstration to get gradients

- Using finite difference.
- Plastic potential is given as

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)^{0.5}$$

Say, at point (100, 200, 100) what is the gradient?

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_3}$$

Can you also obtain the analytic solution?