Euler forward method

강의명: 소성가공이론 (AMB2022)

정영웅

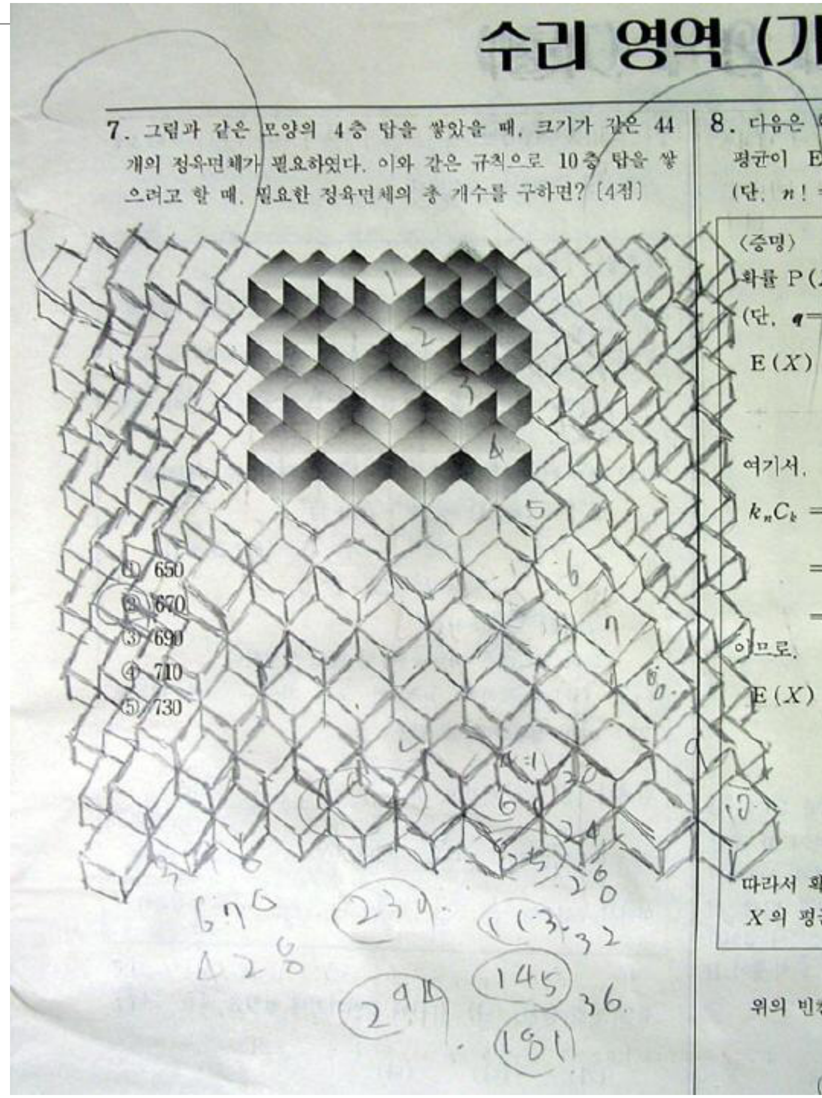
창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Engineering approach

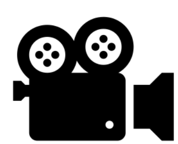


Differential Equation (미분방정식)

- What is differential equation (미분방정식)?
  - 미지의(unknown) 함수와 그 함수의 도함수(derivative)로 이루어진 방정식

$\frac{dy}{dx} = x$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 x	$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{dy}{dx} = y$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y	$y(x) = Ce^x$
		implicit
$yy' + x = 0$	Some complex differential equation	$y(x)^a + x^a = C$

$$** \ y' = \frac{dy}{dx}$$

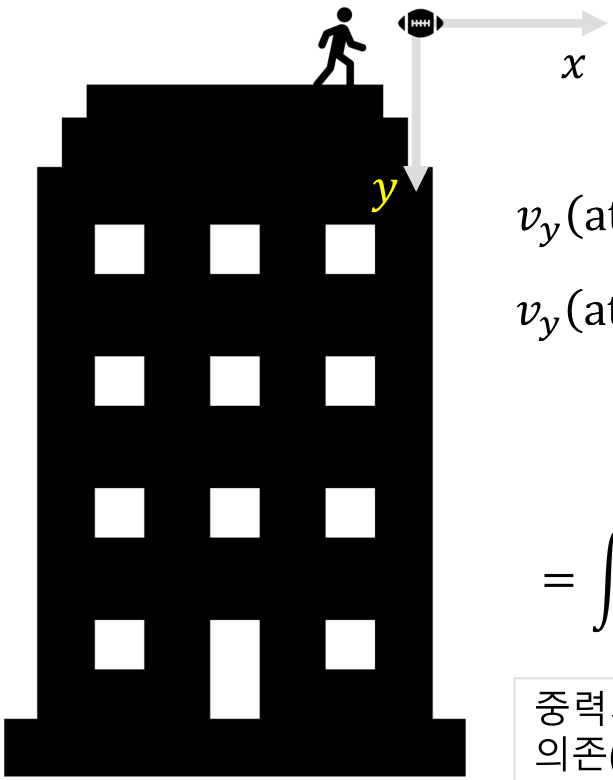

https://youtu.be/HKvP2ESjJbA

Application of differential equation? (Ex1)

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 속도 $\vec{v} = (v_x, v_y)$는?
(해당시간동안 지상에 도달 못한다고 가정)

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용

$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$



v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$v_y(\text{at } t = 0) = 0$$

$$v_y(\text{at } t = T) \; = v_y(\text{at } t = 0) + \Delta v_y = 0 + \int_0^T dv_y \; = \int_0^T \frac{dv_y}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 y방향 속도 변화량

$$= \int_0^T g\, dt \; = g \int_0^T dt \; = gT$$

중력가속도 g가 시간에 의존(dependent)하는가?

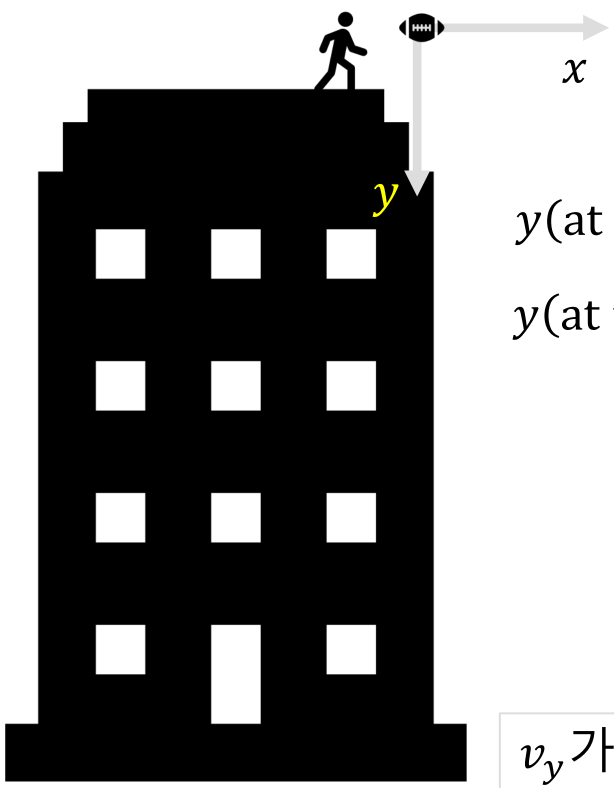
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

Application of differential equation? (Ex2-1)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$y(\text{at } t = 0) = 0$$

$$y(\text{at } t = T) \quad = y(\text{at } t = 0) + \Delta y \quad = 0 + \int_0^T dy \quad = \int_0^T \frac{dy}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 y방향 위치

$$= \int_0^T v_y dt \quad = \int_0^T v_y(t) dt \quad = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} g T^2$$

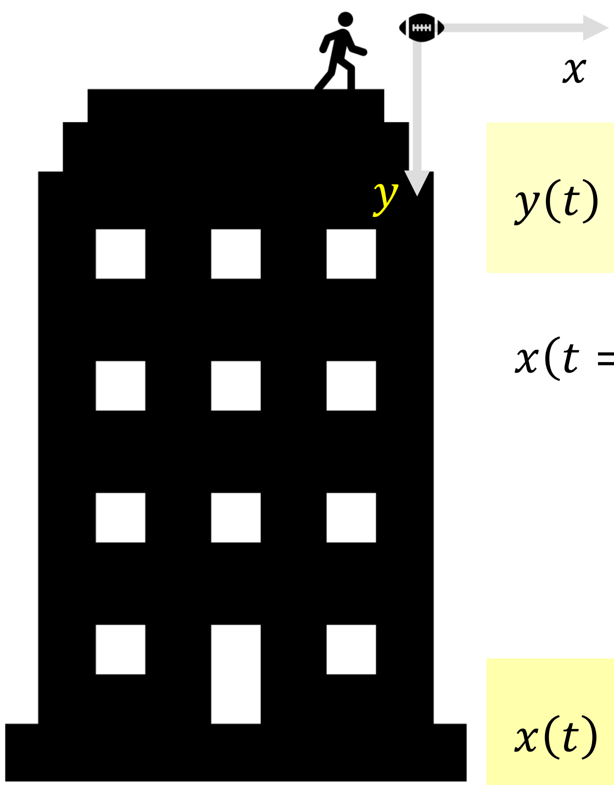
v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

Application of differential equation? (Ex2-2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\,dt = \frac{1}{2}gT^2$$

x가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$x(t=T) = x(t=0) + \Delta x = x(t=0) + \int_0^T dx = 0 + \int_0^T v_x dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 x방향 위치

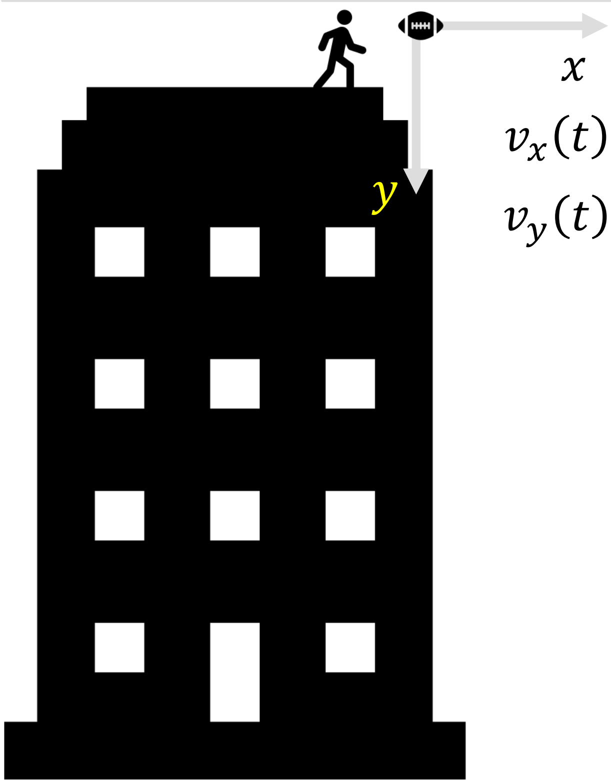
v_x가 시간에 따라 변하는가?

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$

Analytic solution of (Ex1)

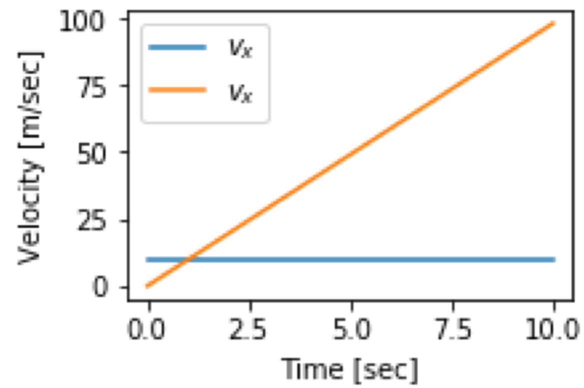
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 속도 $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, v_y)$는?
(해당시간동안 지상에 도달 못한다고 가정)



$$v_x(t) = 10\ [m/s]$$

$$v_y(t) = gt$$

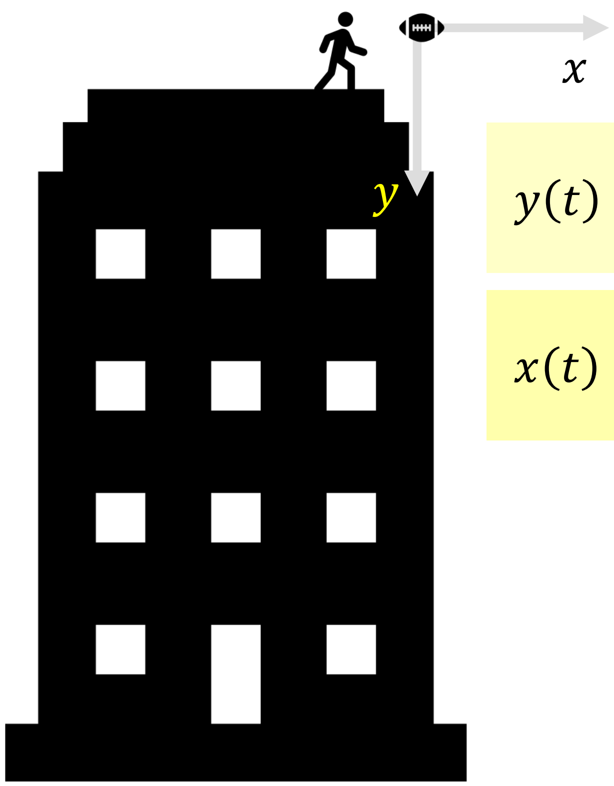


Analytic solution of (Ex2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 공의 위치는?

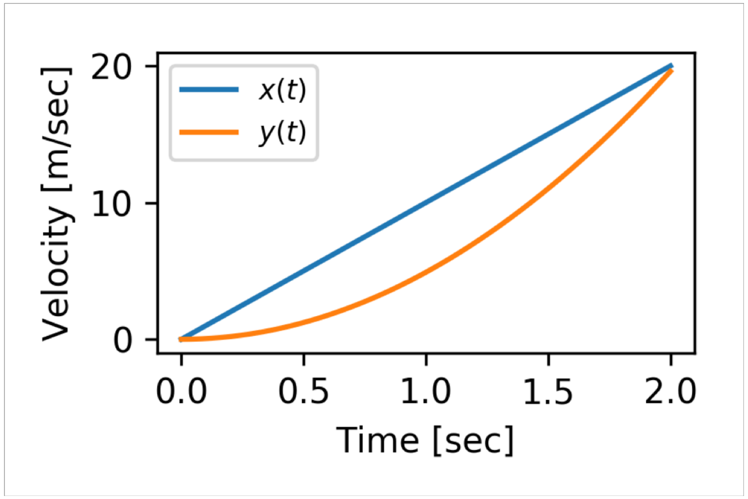
몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} gT^2$$

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$



Numerical method?

- There are many of them. My examples in what follows are limited to Forward Euler method applied for integration.

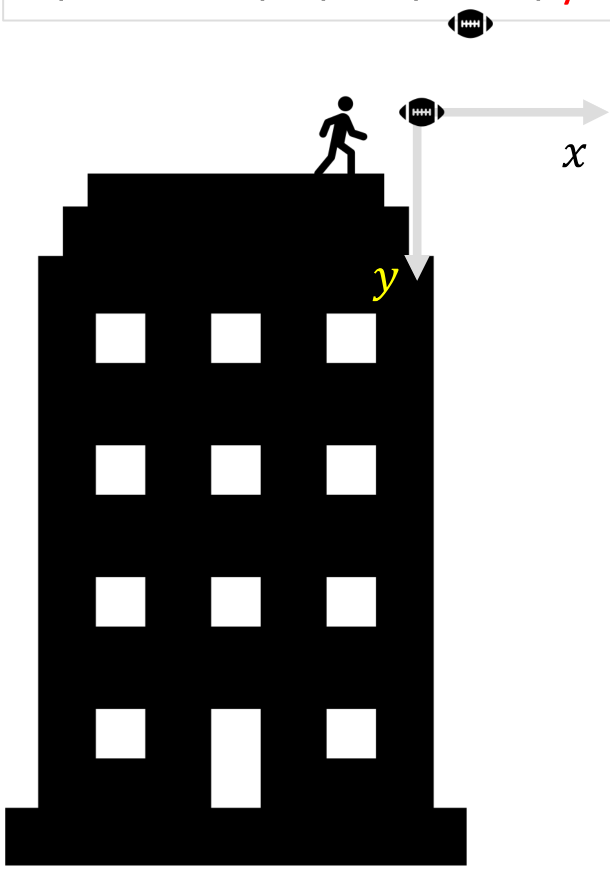
- Euler method (오일러 방법); 미분방정식을 푸는 간단한 방법.
- 다음과 같은 미분 방정식이 주어졌을 때, 함수 y를 임의의 시간t에 대해 알 수 있나?
  - $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$
  - 시간의 흐름을 균일하게 Δt 의 사이즈로 나누어 생각해보면, i번째 시간 단계 (time step)에서의 시간은 그 전 단계(0)과 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.
    - $t_i = t_0 + i\Delta t$ 로 시간을 나누면?
  - 위의 미분 방정식을 다음과 같이 근사하며 표현할 수 있는데…
    - $\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = f(t_i, y_i)$
    - $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

https://ko.wikipedia.org/wiki/오일러_방법

Numerical solution? (Ex2)

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 10초가 지난 후 공의 y 위치는?



$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

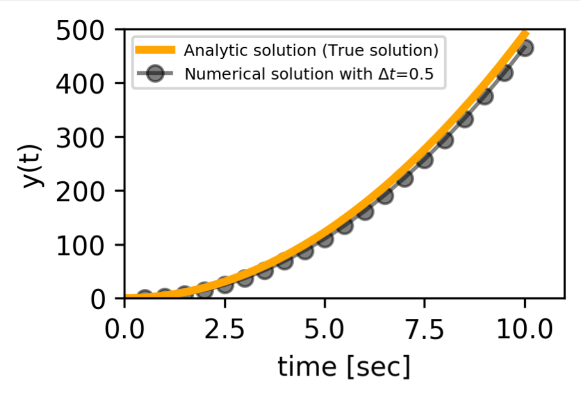
$$dy = v_y(t) \cdot dt$$

$$\Delta y = v_y(t) \cdot \Delta t$$

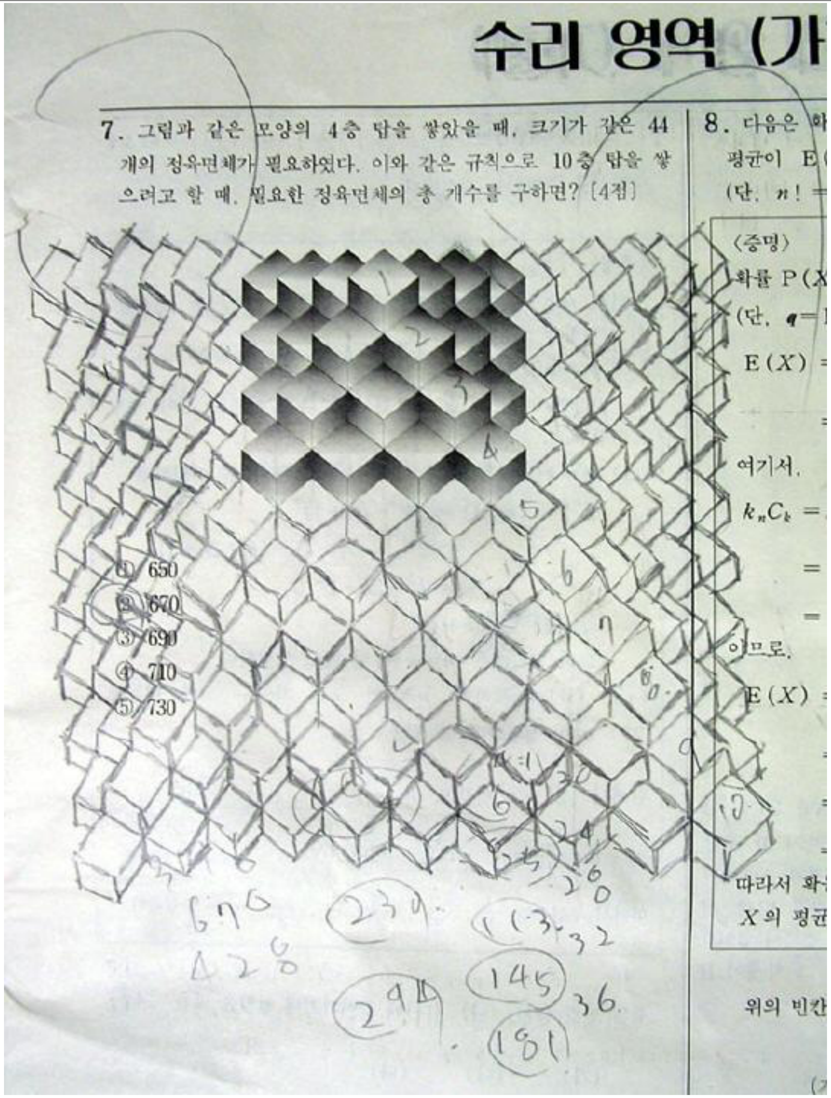
Let's say $\Delta t = 1$ and $t_0 = 0$

$$y_{n+1} = y_n + v_y(t_n)\Delta t = y_n + g t_n \Delta t$$

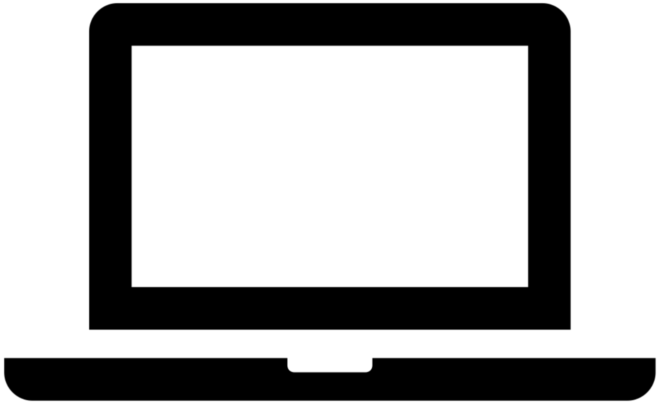
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$



~~Engineering~~ Numerical approach + Computer



+

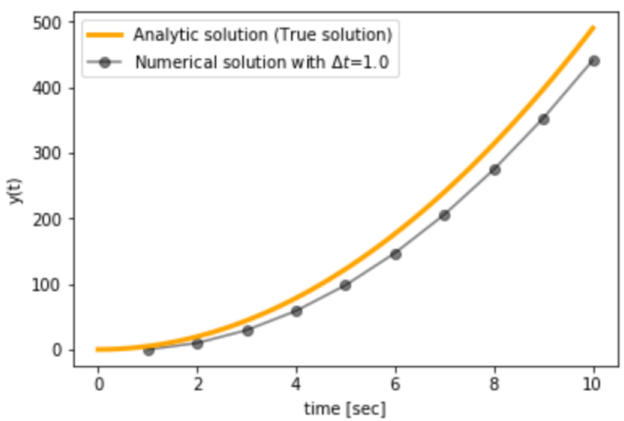


Simple programming using Python

```
t=0.
y_nu=0.
dt=1
ts=[]
ys=[]
while (t<10):
    y_nu=y_nu+9.8*dt*t
    #plot(t,y_nu,'ok')
    t=t+dt
    ts.append(t)
    ys.append(y_nu)

t=np.linspace(0,10)
ax=gca()
ax.plot(t,y(t),label='Analytic solution (True solution)',c='orange',lw=3)
ax.plot(ts,ys,'k-o',label=r'Numerical solution with $\Delta t$=%2.1f'%dt,alpha=0.5,zorder=-1)
ax.set_xlabel(r'time [sec]')
ax.set_ylabel(r'y(t)')
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x10cbdfad0>
```



Excel demonstration of the previous Ex.

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

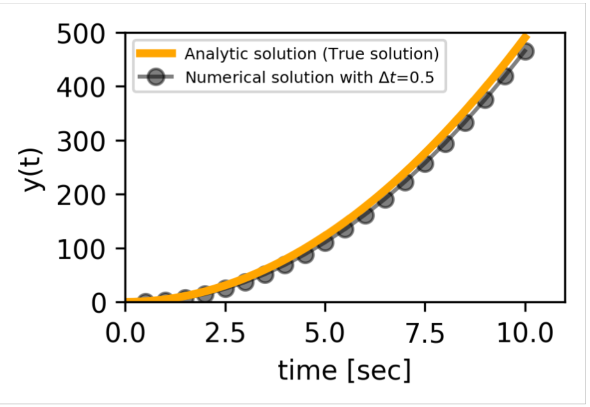
$$dy = v_y(t) \cdot dt$$

$$\Delta y = v_y(t) \cdot \Delta t$$

Let's say $\Delta t = 1$ and $t_0 = 0$

$$y_{n+1} = y_n + v_y(t_n)\Delta t = y_n + g t_n \Delta t$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$



Advanced example

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y

$$\boxed{y(x) = Ce^x}$$

$y(x)$ 함수의 해석적 해

초기 조건: $y(x=0)=1$ 인 조건이 주어진다면…

$y(x) = e^x$

수치적 접근

초기 조건: $y(x=0)=1$

Q: x가 4일 때 y는? 즉, y(4)?

Let's solve it with $\Delta x = 1$
(assuming $\Delta x = 1$ is sufficiently small)

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y = y_n + y_n \Delta x$$

Δx는 0.1로 가정했다.
그렇다면 Δy는?

$\Delta y = y\Delta x$

$y_{n+1} = y_n + y_n \times \Delta x$

$y_{n+1} = y_n(1+\Delta x)$

$x_0 = 0$ 일 때 $y_0 = 1$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1$	$y_1 = 1\times 2 = 2$
$x_2 = 2$	$y_2 = 2\times 2 = 4$
$x_3 = 3$	$y_3 = 4\times 2 = 8$
$x_4 = 4$	$y_4 = 8\times 2 = 16$

Advanced example

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y

$$y(x) = Ce^{x}$$

$y(x)$ 함수의 해석적 해

초기 조건: $y(x=0) = 1$ 인 조건이 주어진다면…

$$y(x) = e^{x}$$

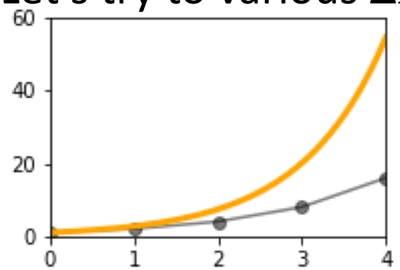
수치적 접근

초기 조건: $y(x=0) = 1$

Q: x가 4일 때 y는? 즉, y(4)?

54.65277549135438

Let's try to various Δx values



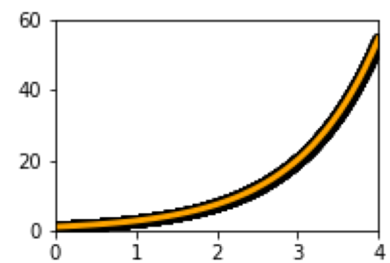
n	x	y
0	0.00	1.00
1	1.00	2.00
2	2.00	4.00
3	3.00	8.00
4	4.00	16.00

n	x	y
0	0.00	1.00
1	0.50	1.50
2	1.00	2.25
3	1.50	3.38
4	2.00	5.06
5	2.50	7.59
6	3.00	11.39
7	3.50	17.09
8	4.00	25.63

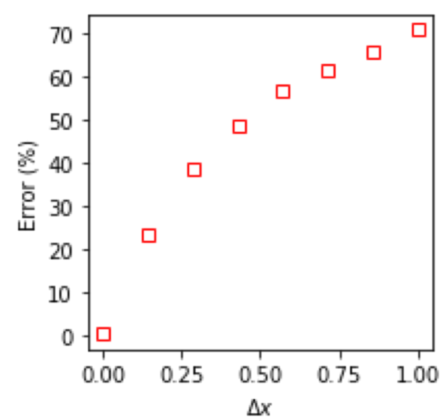
n	x	y
0	0.00	1.00
1	0.01	1.01
2	0.02	1.02
3	0.03	1.03
4	0.04	1.04
5	0.05	1.05

…

395	3.95	50.93
396	3.96	51.44
397	3.97	51.95
398	3.98	52.47
399	3.99	52.99
400	4.00	53.52



3993	3.993	54.109
3994	3.994	54.163
3995	3.995	54.218
3996	3.996	54.272
3997	3.997	54.326
3998	3.998	54.380
3999	3.999	54.435
4000	4.000	54.489



Excel demonstration

$$\frac{dy}{dx} = y$$

초기 조건: $y(x = 0) = 1$

Example (Assignment)

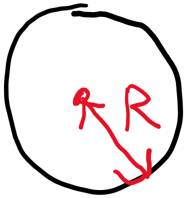
- 재료의 변형을 설명하는데 있어 가장 기초적으로 쓰이는 물리량은 변형률(strain)이다. 특히 진변형률 (true strain) ε 은 다음과 같이 물질의 길이 l 에 의한 미분 방정식의 형태로 정의 된다:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

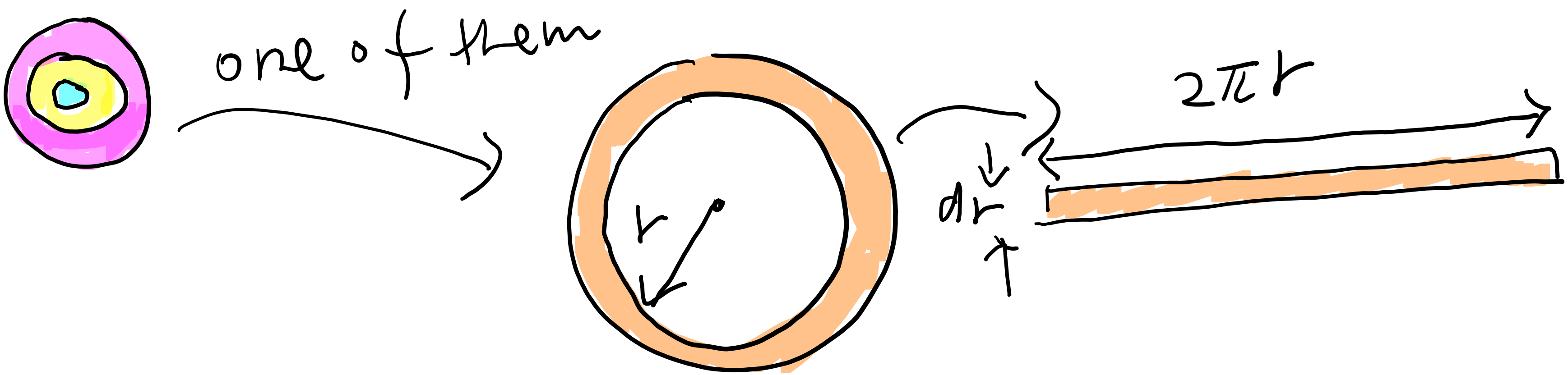
- 앞서 배운 Euler method를 사용해서, 길이 l이 10 mm 에서 16 mm 로 변할 때 이에 해당하는 진변형률 ε을 다음의 조건에서 구하여라.
  - 초기의 진변형률 (즉 길이 l이 10 [mm] 일 때의 ε값)은 0이다.
  - Δl을 3 mm, 2 mm, 1 mm로 변함에 따라 달라지는 ε값에 대해 살펴보아라.
  - 위 미분 방정식의 해석적 해를 구하고, Euler method를 통해 얻은 값을 비교해 보아라.

Area of circle.

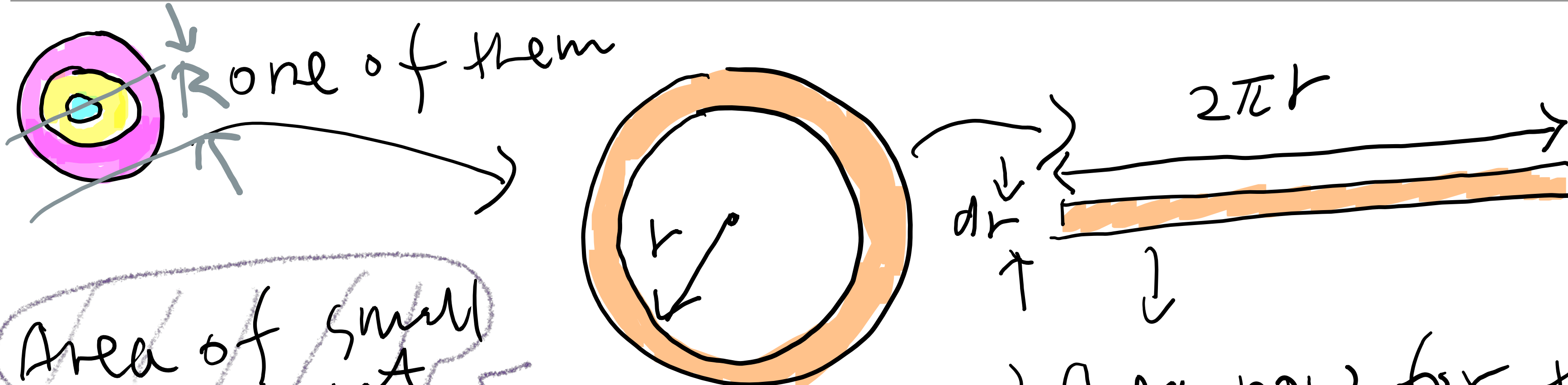
- Everyone knows how to calculate the area of circle whose radius is given as <r>.



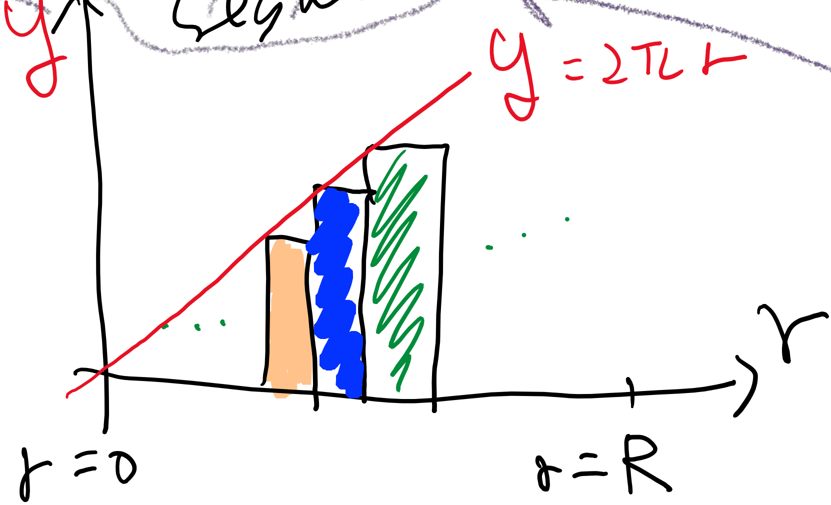
- The answer is: πR^2
- Let's invent the integration.
  - Divide the whole area by chopping them as smaller rings:



Area of circle.



Area of small segment



Area now for this segment is

$2\pi r \cdot dr$

$$\int_{r=0}^{r=R} 2\pi r \cdot dr = \pi r^2 \Big]_0^R = \pi R^2$$