미분방정식과 해석적 해

강의명: 소성가공이론 (AMB2022)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Differential Equation (미분방정식)

- What is differential equation (미분방정식)?
  - 미지의(unknown) 함수와 그 함수의 도함수(derivative)로 이루어진 방정식

$\frac{dy}{dx} = x$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 x	$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$
$\frac{dy}{dx} = y$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y	$y(x) = Ce^x$
$yy' + x = 0$	Some complex differential equation	implicit $y(x)^a + x^a = C$

$$** \ y' = \frac{dy}{dx}$$

https://youtu.be/HKvP2ESjJbA

ODE and PDE

- Ordinary Differential Equation (상미분 방정식)
  - $\frac{du}{dx} = kx$
- Partial Differential Equation (편미분 방정식)
  - $u(x,t) = F(x)e^t$
  - ~~Wave equation~~
  - Laplace (1780s)
    - Mechanical equilibrium
    - Thermal equilibrium
  - Heat equation (Fourier 1800s)
  - Transport equation

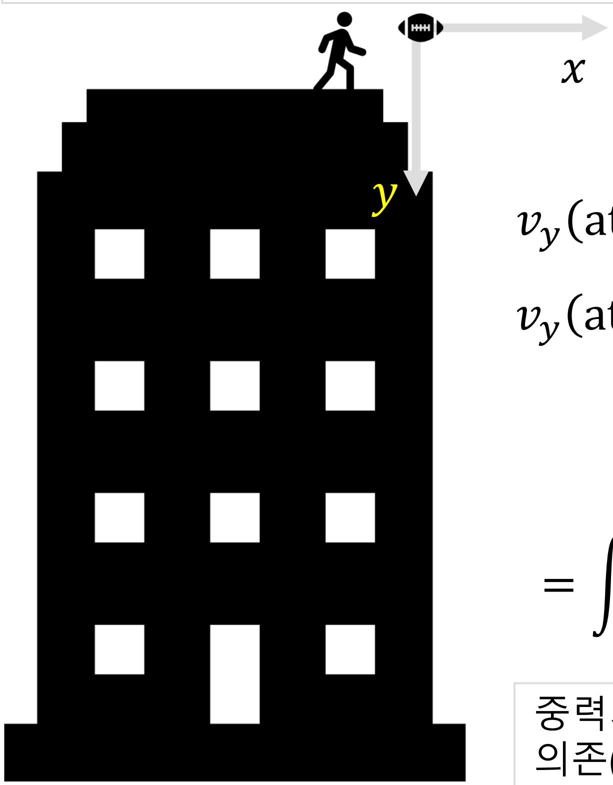
- ODE example
  - $\frac{dx}{dt} = x$
- What's the general solution of the above?
  - $x(t) = ce^t$ c: arbitrary constant
- PDE example:
  - $\frac{\partial u}{\partial t} = u$ (u depends on x and t)
- What's the general solution of the above?
  - $u(x,t) = F(x)e^t$ ($F(x)$: arbitrary function)

Application of differential equation? (Ex1)

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 속도 $\vec{v} = (v_x, v_y)$는? (해당시간동안 지상에 도달 못한다고 가정)

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용

$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$



v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$v_y(\text{at } t = 0) = 0$$

$$v_y(\text{at } t = T) \;= v_y(\text{at } t = 0) + \Delta v_y = 0 + \int_0^T dv_y \;= \int_0^T \frac{dv_y}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 y방향 속도 변화량

$$= \int_0^T g\, dt \;= g \int_0^T dt \;= gT$$

중력가속도 g가 시간에 의존(dependent)하는가?

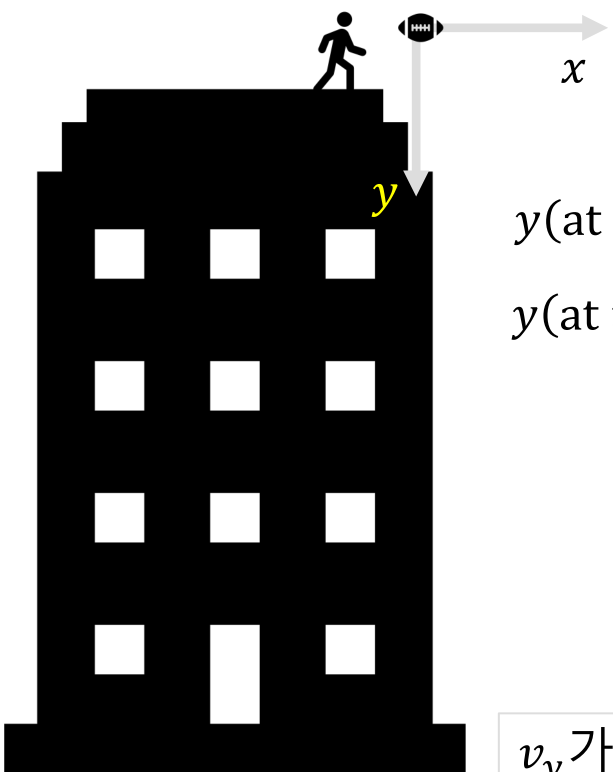
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

Application of differential equation? (Ex2-1)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$y(\text{at } t = 0) = 0$$

$$y(\text{at } t = T) = y(\text{at } t = 0) + \Delta y = 0 + \int_0^T dy = \int_0^T \frac{dy}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 y방향 위치

$$= \int_0^T v_y dt = \int_0^T v_y(t) dt = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} gT^2$$

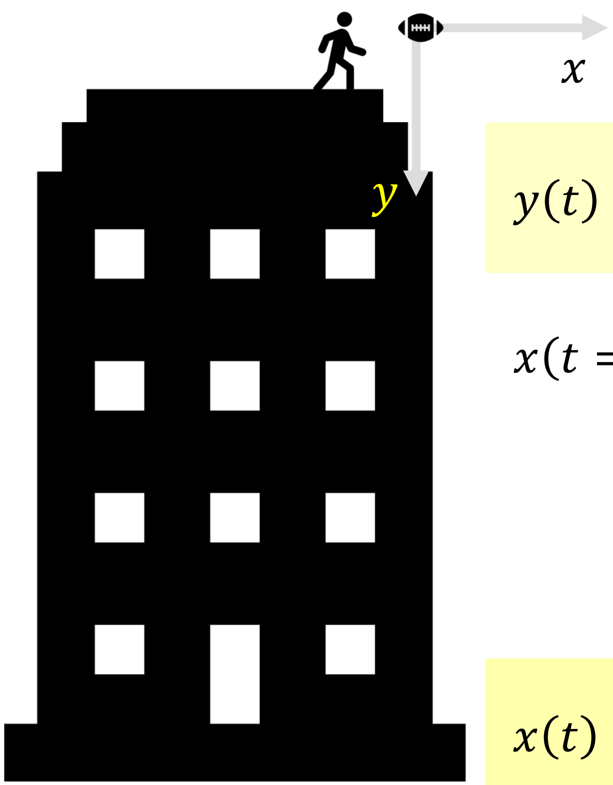
v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

Application of differential equation? (Ex2-2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \quad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} gT^2$$

x가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$x(t=T) = x(t=0) + \Delta x = x(t=0) + \int_0^T dx = 0 + \int_0^T v_x dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 x방향 위치

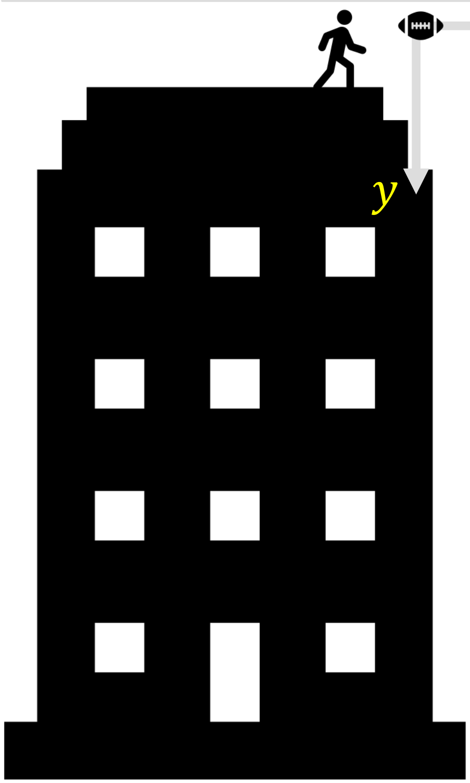
v_x가 시간에 따라 변하는가?

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$

Analytic solution of (Ex1)

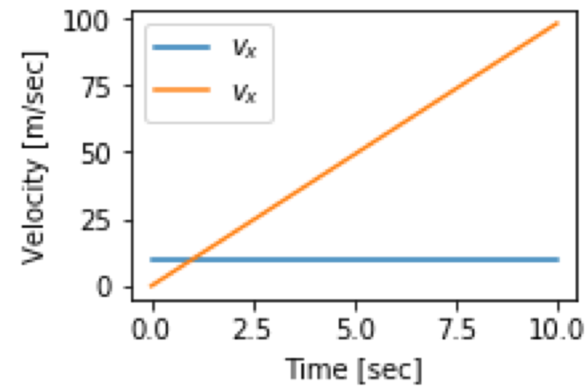
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로
어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의
시간 T가 지난 후 의 속도 $\vec{v} = (v_x, v_y)$는?
(해당시간동안 지상에 도달 못한다고 가정)



$$v_x(t) = 10\ [m/s]$$

$$v_y(t) = gt$$

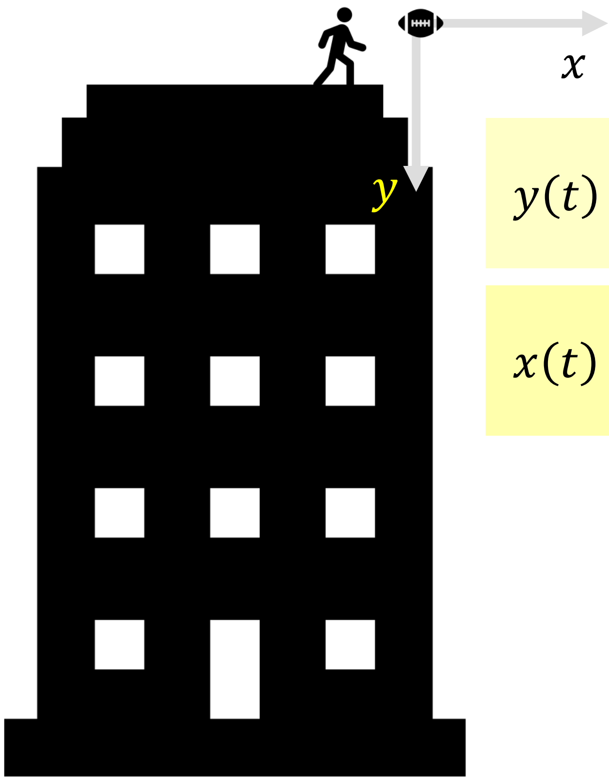


Analytic solution of (Ex2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 공의 위치는?

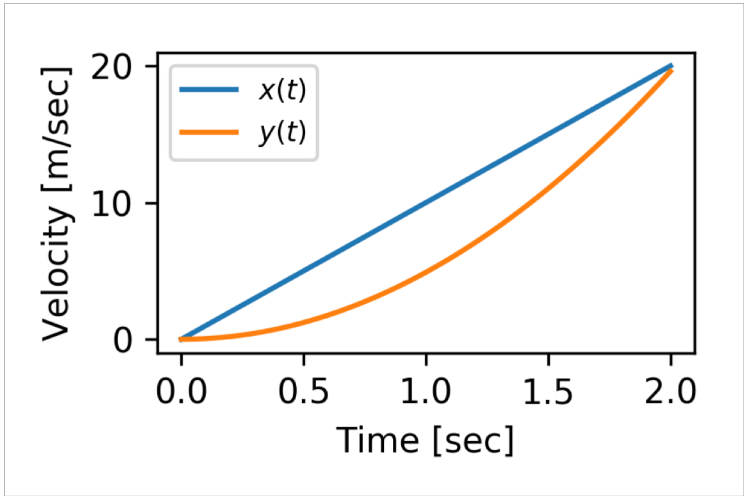
몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} gT^2$$

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$



Discussions

- 속도에 대한 간단한 방정식이 ‘이동거리’의 시간에 대한 미분 방정식임을 깨달았다.
- 이동거리의 시간에 대한 미분 방정식을 풀면, 시간에 따라 이동한 거리를 알 수 있다.
- 초기 조건 (즉 초기의 위치)를 알때 임의의 시간 t가 흐른 다음의 위치를 파악할 수 있다.