

일반적 열 전달 방정식

Heat Transfer In General Formula

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부

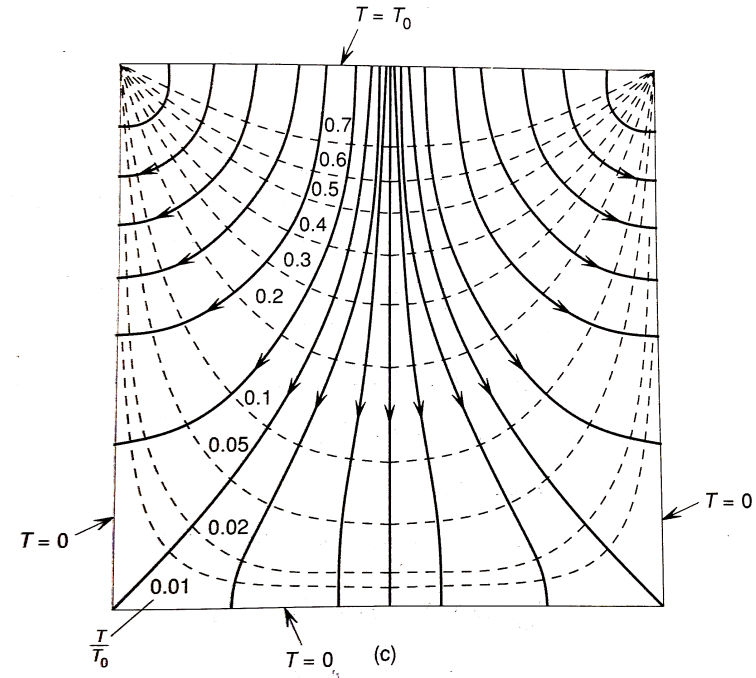
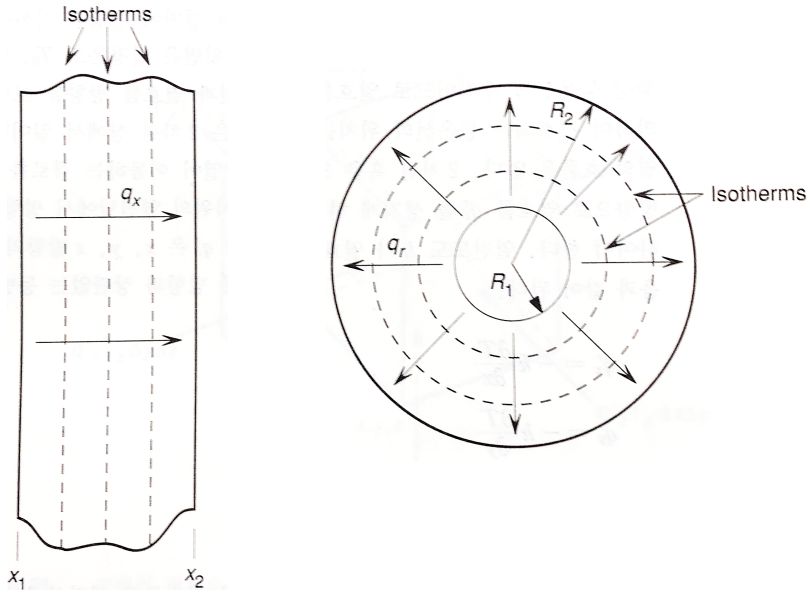
정영웅



yjeong@changwon.ac.kr
<https://youngung.github.io>
<https://github.com/youngung>

일반(다차원적) 열전도 방정식

□ 앞서 우리는 평면벽이나 원통형벽을 통해 1차원적인 열전도 (즉, 단 한방향으로의 열전도)만을 고려하였다.



□ 더욱 복잡한 형상이나, 다차원적 열 경계 조건에서는 일반적 열전도 방정식을 사용하여 열전도 현상을 설명해야 한다.



등방성 재료의 열전도도

- 따라서, 열 흐름 (heat flux) q 는 벡터로 표현되며, 3차원 공간에서 벡터 \vec{q} 는 세 성분으로 이루어진다: $\vec{q}_x, \vec{q}_y, \vec{q}_z$
- 3차원 공간의 일반적 열흐름 문제를 설명하기 위해서는 Fourier 법칙을 다음과 같이 표현하여야 한다.

$$\vec{q}_x = -kA_x \frac{dT}{dx}$$

$$\vec{q}' = -\bar{\bar{k}} \cdot \vec{\nabla}T$$

$$\vec{q}'_i = -\bar{\bar{k}}_{ij} \vec{\nabla}_j T$$

$\vec{\nabla}T$: Temperature Gradient
 $\bar{\bar{k}}$: 열전도도 tensor

$$\vec{q}'_x = -\bar{\bar{k}}_{xx} \vec{\nabla}_x T - \bar{\bar{k}}_{xy} \vec{\nabla}_y T - \bar{\bar{k}}_{xz} \vec{\nabla}_z T$$

$$\vec{q}'_x = -\bar{\bar{k}}_{xx} \vec{\nabla}_x T$$

$$\vec{q}'_x = -k \vec{\nabla}_x T$$

$$\vec{q}'_y = -\bar{\bar{k}}_{yx} \vec{\nabla}_x T - \bar{\bar{k}}_{yy} \vec{\nabla}_y T - \bar{\bar{k}}_{yz} \vec{\nabla}_z T$$

$$\vec{q}'_y = -\bar{\bar{k}}_{yy} \vec{\nabla}_y T$$

$$\vec{q}'_y = -k \vec{\nabla}_y T$$

$$\vec{q}'_z = -\bar{\bar{k}}_{zx} \vec{\nabla}_x T - \bar{\bar{k}}_{zy} \vec{\nabla}_y T - \bar{\bar{k}}_{zz} \vec{\nabla}_z T$$

$$\vec{q}'_z = -\bar{\bar{k}}_{zz} \vec{\nabla}_z T$$

$$\vec{q}'_z = -k \vec{\nabla}_z T$$

Let's assume $\bar{\bar{k}}_{ij} = 0$ if $i \neq j$

열전도도가 등방성을 가질 때.



열 에너지 수지

$$\vec{q}'_x = -k\vec{\nabla}_x T$$

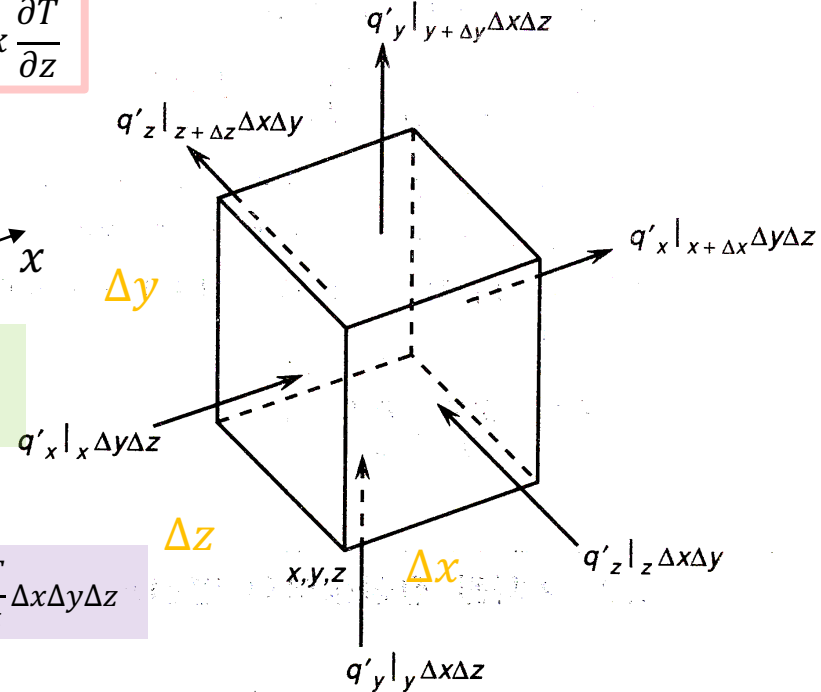
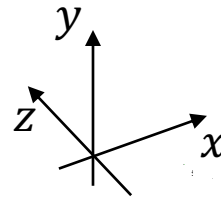
$$q'_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q'_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$q'_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\vec{q}'_y = -k\vec{\nabla}_y T$$

$$\vec{q}'_z = -k\vec{\nabla}_z T$$



$$\left(\frac{\text{들어온 열}}{t}\right) - \left(\frac{\text{나간 열}}{t}\right) + \left(\frac{\text{발생한 열}}{t}\right) = \text{시간당 열에너지 변화}$$

$$(\text{발생한 열}/t) = \dot{q}\Delta V = \dot{q} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{열에너지 변화}/t = \text{부피내 재료의 엔탈피 변화}/t = \frac{\partial H}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\begin{aligned} & (q'_x|_x - q'_x|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + (q'_y|_y - q'_y|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z \\ & + (q'_z|_z - q'_z|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y + \dot{q} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

$$\frac{(q'_x|_x - q'_x|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(q'_y|_y - q'_y|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(q'_z|_z - q'_z|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + \dot{q} = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-\left(\frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial q'_z}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$



열전도 방정식

$$-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho C_{p(m)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Steady-state $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$

No heat-generation $\dot{q} = 0$

$$-k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = 0 \quad \longrightarrow \quad -k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

Laplacian: Divergence of Gradient: $\sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)$

정상상태의 수학적 표현방법에 널리 쓰임



Laplace equation

Laplace equation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace 1780's

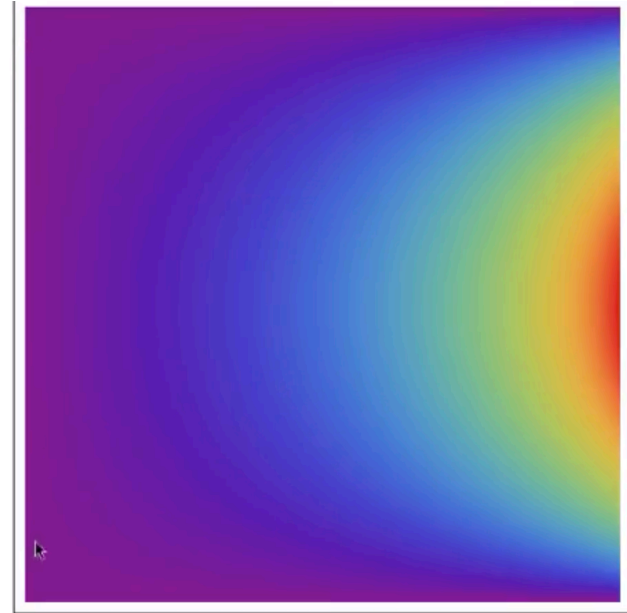
mechanical equilibrium



thermal equilibrium



..plus that boundary data.



2차원 정상상태의 열전도

(x, y) 2차원 공간

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0 \longrightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0$$

온도 분포 $T(x, y)$ 및
온도 구배 $\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$?

적절한 열경계 조건 (boundary condition)과 적분을 통해 구할 수 있겠다.

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi)} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

왼편에 보시다시피, 이러한 방법은
매우 까다롭거나, 어렵다...

이런 경우, 해를 **근사적**으로 구할 수 있는 **유한
차분법** (Finite difference method)이 유용하다.



유한 차분법

미분

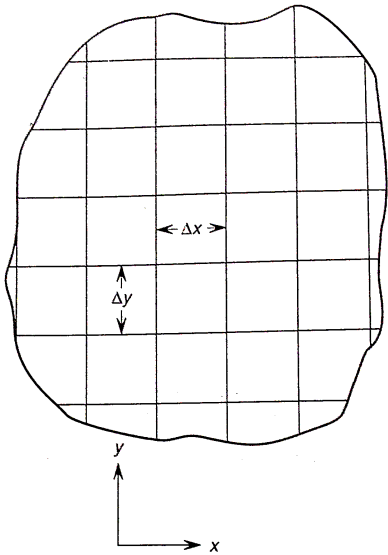
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

1st order 차분

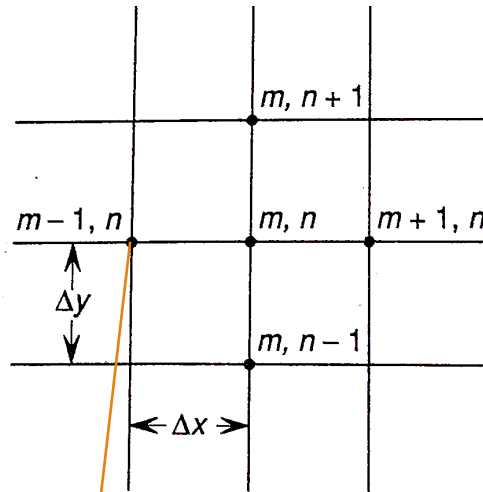
$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x}$$

2nd order 차분

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$



열 구조물을 유한한 크기($\Delta x, \Delta y$)의 grid로 세분한다.



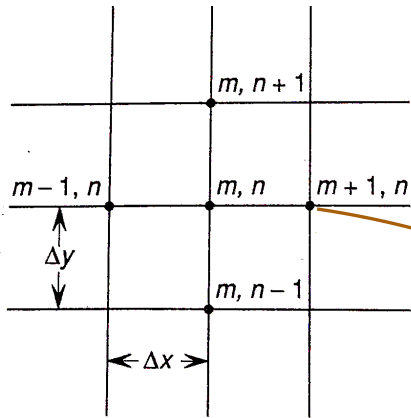
각 교차점에서의 온도 T 를 구하는 것이 목표.

2차원 구조체를 x 축 방향과 y 축 방향으로 각각 분할하여 $T(x, y)$ 를 불연속적인 유한한 크기의 요소 (예를 들어 $T_{m-1,n}, T_{m,n}, T_{m+1,n}$ 로 표기된 온도 분포)에서 찾아보는 방법.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

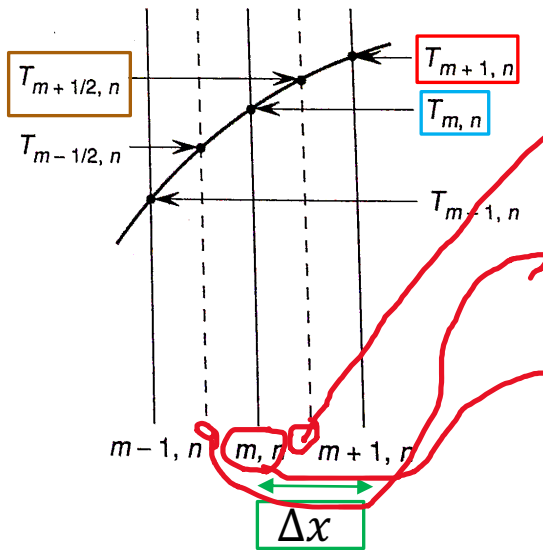
도출해보자



각 교차점에서의 온도 T를 구하는 것이 목표.

각 교차점의 온도를 $T_{m,n}$ 의 $T_{m+1,n}$ 등으로 표기 가능.

$(m + \frac{1}{2}, n)$ 에서 x 방향으로의 온도 구배는?



$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m+\frac{1}{2}, n)} \approx \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m-\frac{1}{2}, n)} \approx \frac{T_{m, n} - T_{m-1, n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(m, n)} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m+\frac{1}{2}, n)} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m-\frac{1}{2}, n)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(m, n)} \approx \frac{\frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x} - \frac{T_{m, n} - T_{m-1, n}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\rightarrow \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n} - (T_{m, n} - T_{m-1, n})}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(m, n)} \approx \frac{T_{m+1, n} - 2T_{m, n} + T_{m-1, n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{(m, n)} \approx \frac{T_{m, n+1} - 2T_{m, n} + T_{m, n-1}}{(\Delta y)^2}$$



검증

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(m,n)} \approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

(x, y) 2차원 공간에서의
정상상태 열전도 방정식에
대입

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(m,n)} \approx \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\left(\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right) = 0$$

$\Delta x = \Delta y$ 의 정사각형
요소를 사용한다면

$$T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1} = 0$$

$$T_{m+1,n} - 4T_{m,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} = 0$$

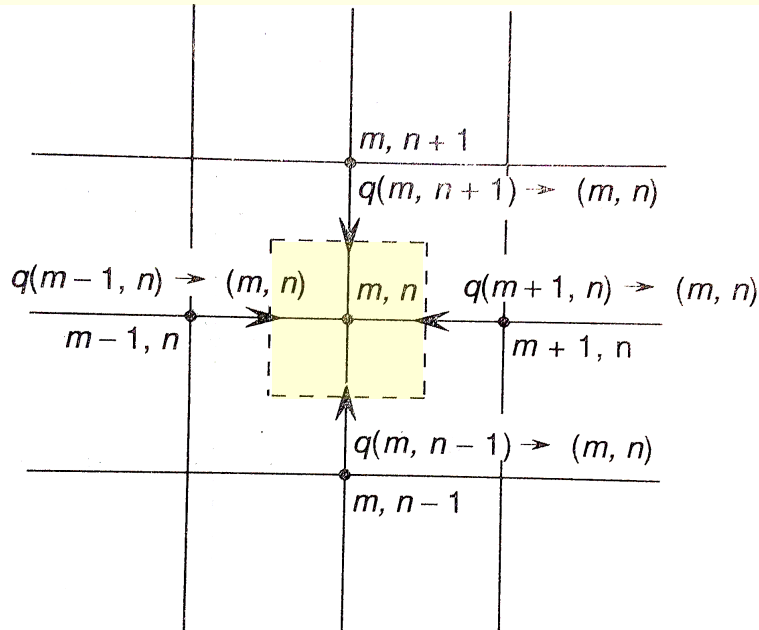
$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} = 4T_{m,n}$$

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$



유한 차분법 검증

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$



(m,n)을 중심으로 하는 노란 요소 안으로 주위에서 유입되는 열량과 요소 내 발생하는 열량의 합이 zero \therefore Steady-state!

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = -k \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \approx -k \cdot \Delta y \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n)} - T_{(m-1,n)}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n) \rightarrow (m+1,n)} \approx -k \cdot \Delta y \Delta z \cdot \frac{T_{(m+1,n)} - T_{(m,n)}}{\Delta x}$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} \approx -k \cdot \Delta x \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n)} - T_{(m,n-1)}}{\Delta y}$$

$$q_{(m,n) \rightarrow (m,n+1)} \approx -k \cdot \Delta x \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n+1)} - T_{(m,n)}}{\Delta y}$$

요소 내 발생하는 열량의 합: $\dot{q} \Delta x \Delta y \Delta z$

$$-k \cdot \Delta y \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n)} - T_{(m-1,n)}}{\Delta x} - k \cdot \Delta x \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n)} - T_{(m,n-1)}}{\Delta y}$$

$$- \left[-k \cdot \Delta y \Delta z \cdot \frac{T_{(m+1,n)} - T_{(m,n)}}{\Delta x} - k \cdot \Delta x \Delta z \cdot \frac{T_{(m,n+1)} - T_{(m,n)}}{\Delta y} \right]$$

$$+ \dot{q} \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

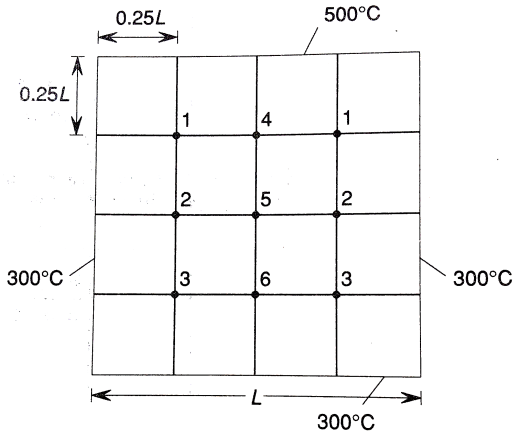
$$T_{(m-1,n)} + T_{(m,n-1)} + T_{(m+1,n)} + T_{(m,n+1)} + \frac{\dot{q} \Delta x \Delta y}{k} - 4T_{(m,n)} = 0$$

With $\Delta x = \Delta y$



예제 6.10

□ 변의 길이가 L인 정사각형 판에서 장상상태하의 온도 분포를 계산하여라.



<p>at Pt. 1</p> $300 + 500 + T_2 + T_4 = 4T_1$	<p>at Pt. 1</p> $-4T_1 + T_2 + T_4 = -800$
<p>at Pt. 2</p> $300 + T_1 + T_3 + T_5 = 4T_2$	<p>at Pt. 2</p> $T_1 - 4T_2 + T_3 + T_5 = -300$
<p>at Pt. 3</p> $300 + 500 + T_2 + T_6 = 4T_3$	<p>at Pt. 3</p> $T_2 - 4T_3 + T_6 = -800$
<p>at Pt. 4</p> $500 + T_1 + T_1 + T_5 = 4T_4$	<p>at Pt. 4</p> $2T_1 - 4T_4 - T_5 = -500$
<p>at Pt. 5</p> $T_2 + T_2 + T_4 + T_6 = 4T_5$	<p>at Pt. 5</p> $2T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = 0$
<p>at Pt. 6</p> $300 + T_3 + T_3 + T_5 = 4T_6$	<p>at Pt. 6</p> $2T_3 + T_5 - 4T_6 = -300$

$aT_1 + bT_2 + cT_3 + dT_4 + eT_5 + fT_6 = g$
형태로 통합하면...

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -800 \\ -300 \\ -800 \\ -500 \\ 0 \\ -300 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -800 \\ -300 \\ -800 \\ -500 \\ 0 \\ -300 \end{bmatrix}$$



