열전달
Heat Transfer

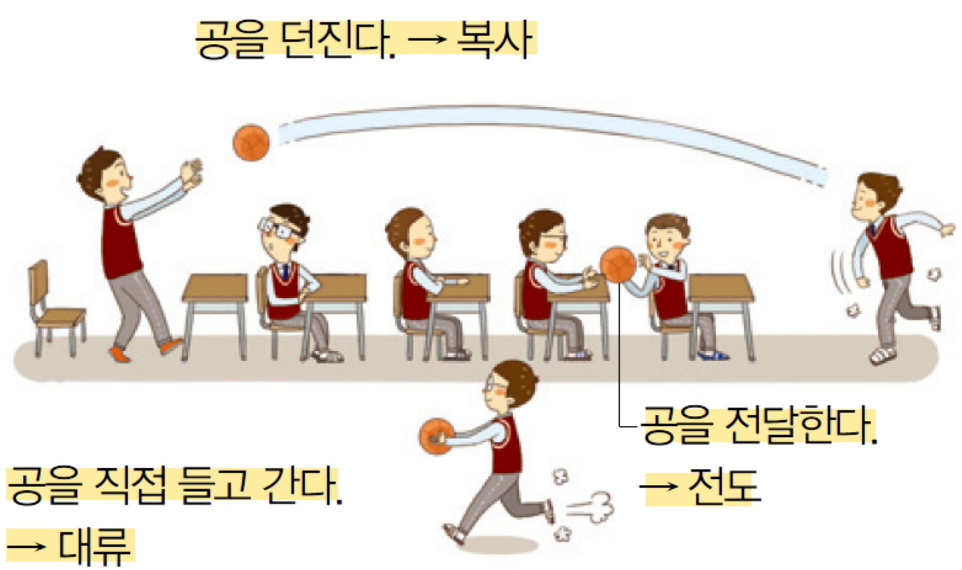
이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부
정영웅

yjeong@changwon.ac.kr
https://youngung.github.io
https://github.com/youngung

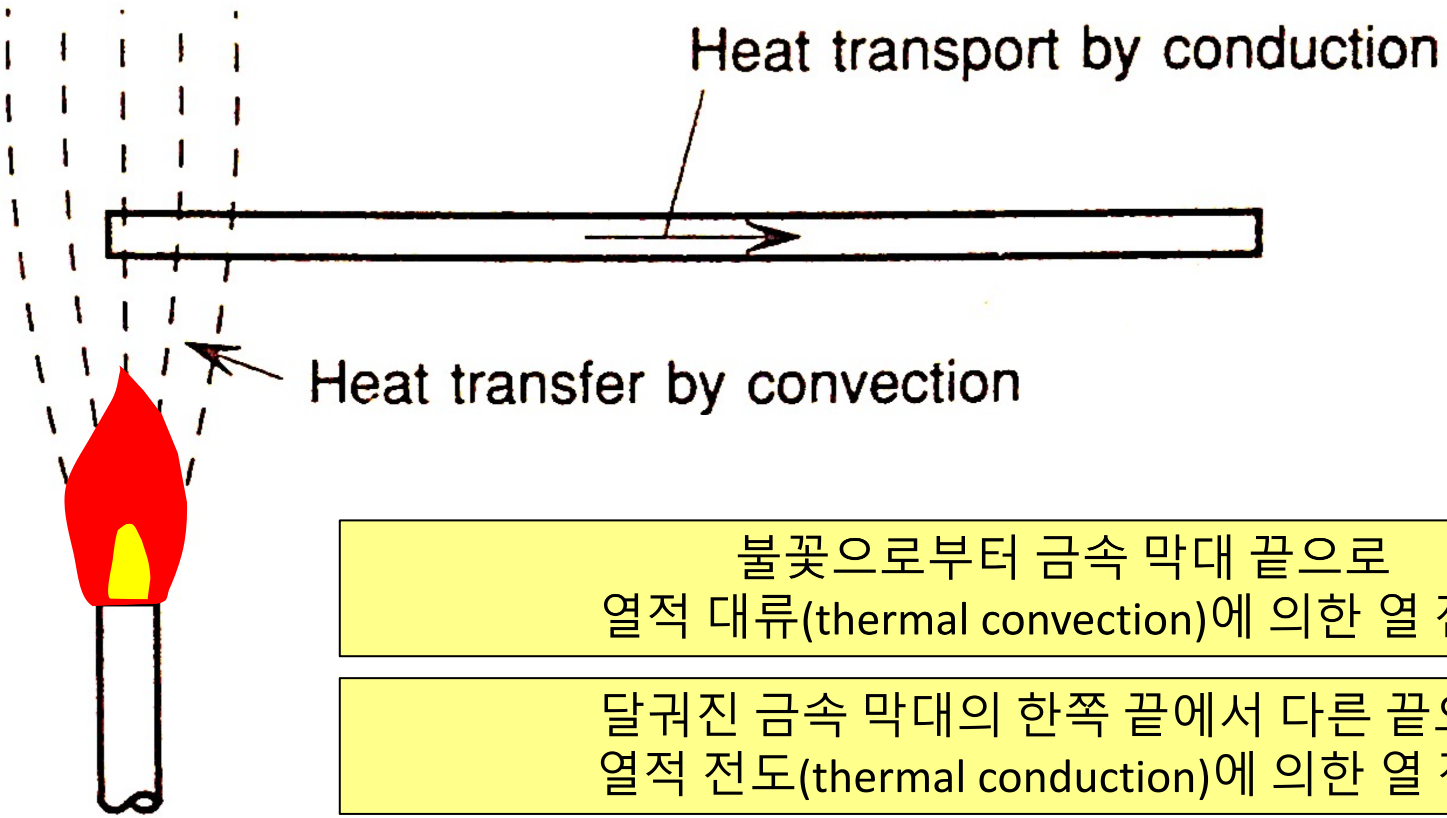
Introduction

- There are a few mechanisms behind the phenomenon of heat transfer
  - Conduction (전도) – heat transport by vibrations of molecules, particles and even electrons – the molecules, particles themselves are not moving.[=
  - Convection (대류) – 열을 가진 fluid가 직접 이동하여, 열이 전달됨
  - Radiation (복사) – 전도나 대류와 달리, 열을 전달하는 매질이 없다.



http://study.zum.com/book/14625

Introduction



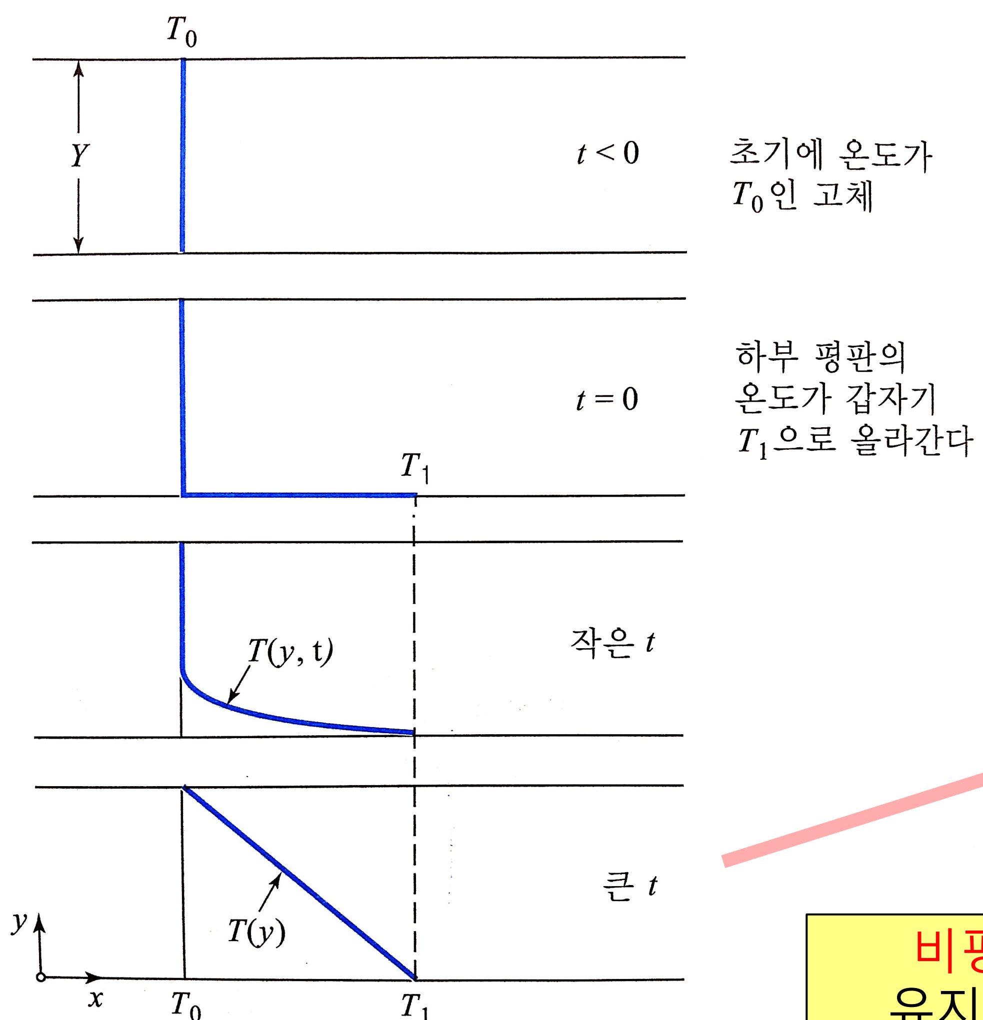
불꽃으로부터 금속 막대 끝으로
열적 대류(thermal convection)에 의한 열 전달

달궈진 금속 막대의 한쪽 끝에서 다른 끝으로
열적 전도(thermal conduction)에 의한 열 전달

대류: 유체의 흐름을 통한 전달

전도: 전자(혹은 이온 등의 미세한 입자들)의 운동 에너지 전달

평행 평판 사이의 고체 평판에 대한 정상 상태 온도 분포의 발달



운동량 전달때와 마찬가지로, 우리는 정상상태에서의 열전달 현상에 초점 둔다. 비정상상태에서의 열전달은 추가로 다룰 예정.

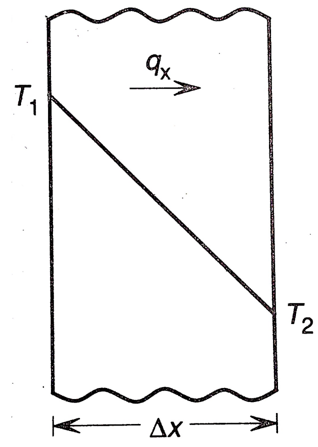
비평형 상태인 온도 분포가 지속적으로 유지되기 위해서는 끊임없이 외부의 열이 공급되어야 한다.

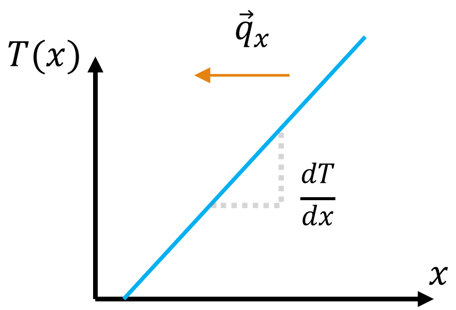
Fourier 법칙

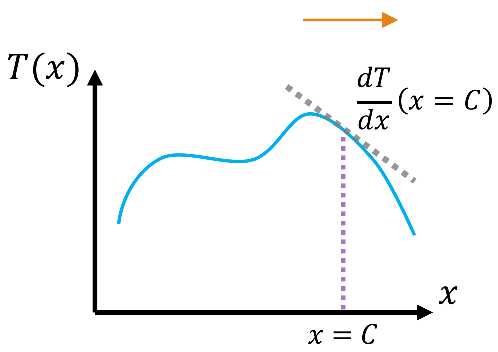
푸리에 법칙: 매질을 통한 열 전달 mechanism인 전도에서, 열 이동률은 온도구배와 통과 면적에 의해 설명된다.

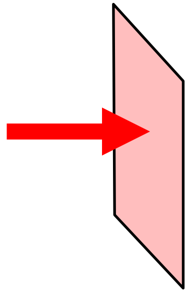
$$\vec{q}_x \propto -A_x \frac{dT}{dx}$$

$\vec{q}_x$: x 방향으로의 열 전달률 (J/s)
dT/dx: 온도의 x 방향으로의 구배 (Gradient)
A_x: x방향으로의 단면적







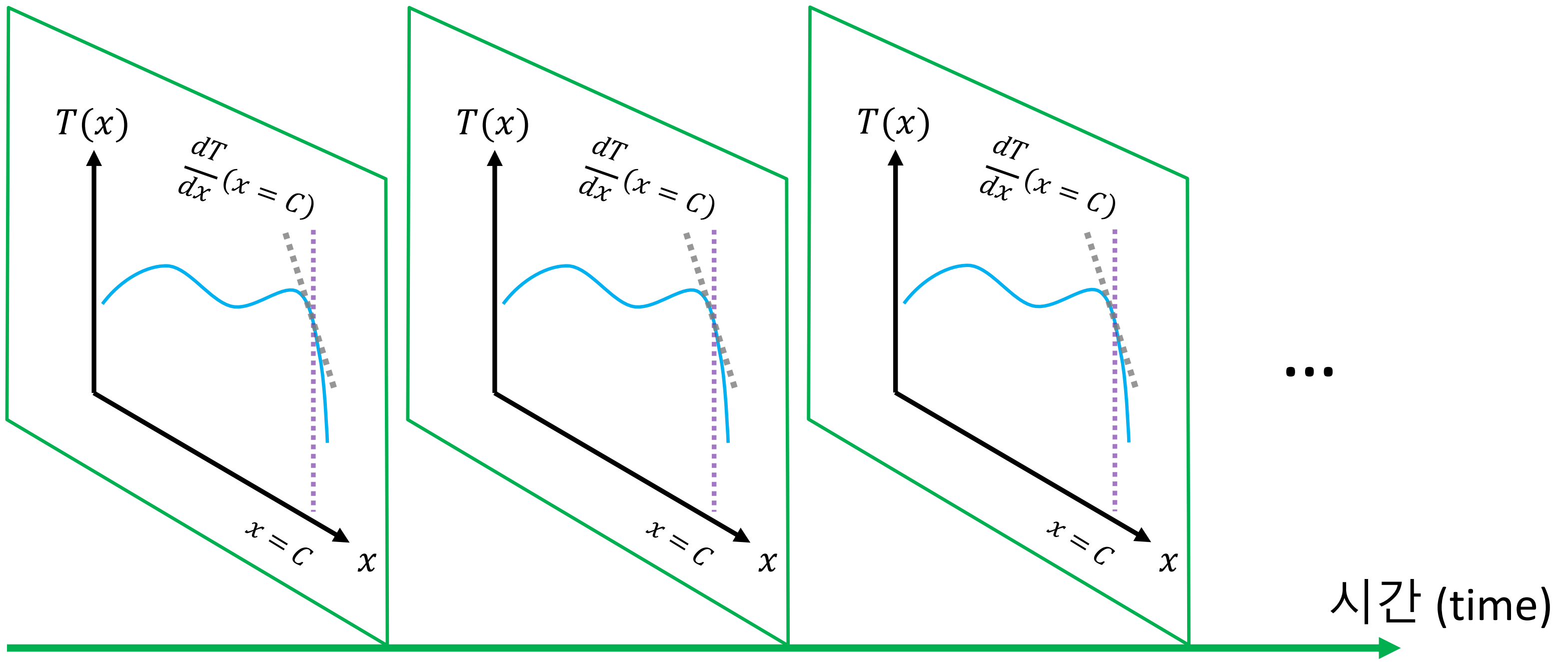


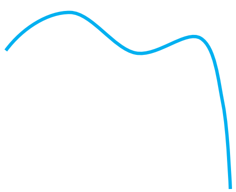
$\frac{dT}{dx}$ is constant along x-axis

Thus, $\vec{q}_x$ should be constant along x-axis

$\frac{dT}{dx}$ varies along x-axis
Thus, $\vec{q}_x$ should be a function of x position

정상상태와 비정상 상태





온도 구배가 시간에 따라
바뀌지 않은 상태: 정상상태

정상상태: 시간에 따라 물리 현상, 성질, 주변 환경 등이 바뀌지 않는 상태

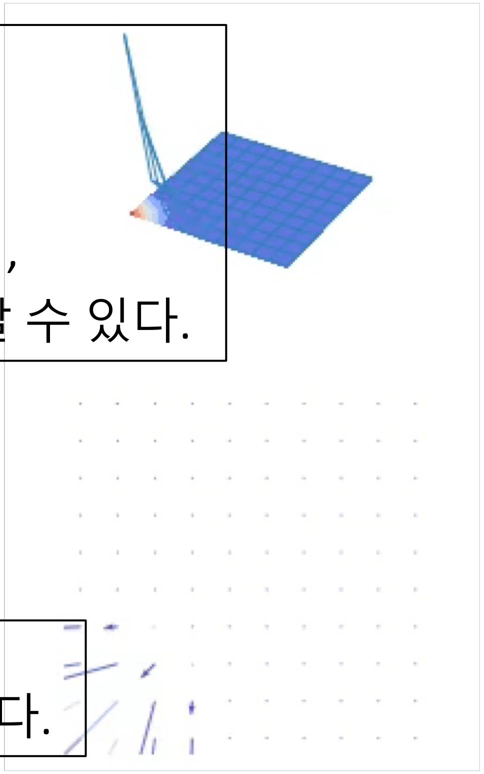
예를 들어, 압력 P가 시간에 따라 변하지 않는다는 것은

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

Fourier 법칙

$$\vec{q}_x = -kA_x \frac{dT}{dx}$$

$\vec{q}_x$: x 방향으로의 열 전달률 $[J/s]$
dT/dx: 온도 구배(gradient)의 x방향 성분
A_x: x방향으로의 단면적
k: 열이 전도되는 매질의 열전도도 (물질의 고유한 성질)



1차원, 즉 특정 선방향에서만 살펴본 온도 구배에서는 확연하게 나타나지 않지만, 2차원 이상에서의 온도 구배를 살펴보면, 온도 구배 또한 방향을 가진 물리량임을 알 수 있다.
온도구배($\frac{dT}{dx}$,$\vec{\nabla}T$)는 기울기의 가파름 그리고 방향을 가지고 있으니, 여러분들이 친숙한 벡터 (vector) 라고 불리는 형식의 물리량임을 알 수 있다.

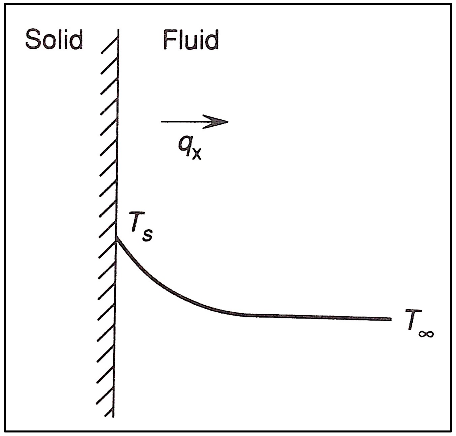
열 전달률($\vec{q}$) 또한 방향을 가진 물리량으로써, 시간당 전달되는 에너지의 크기(세기)와 방향을 가지고 있으니, 마찬가지로 vector 임을 알 수 있다.

온도 구배의 방향과 열 전달률의 방향이 서로 '반대방향' 이므로 Fourier 법칙에서 보이는 바와 같이 – (minus) 기호가 필요하다.

Newton’s law of cooling

- The rate of heat loss of a body is directly proportional to the difference in the temperatures between the body and its surroundings, provided that the temperature difference is small and the nature of body surface remains the same.

Fourier’s law가 잘 맞는 경우에, Newton’s law는 열전도에 따른 cooling 현상에 적절하다.
그리고 대류에서도 (근사적으로) 쓰인다.



T_s: Solid-Fluid 계면에서의 온도
T_∞: 계면에서 무한대로 떨어진 곳의 온도

$$\vec{q}_x \propto A_s(\Delta T)$$

$$\vec{q}_x = hA_s\Delta T$$

$\vec{q}_x$: x 방향으로의 열 전달률 (J/s)
$\Delta T(= \mathrm{T_s} - \mathrm{T_\infty})$: 온도 차이
A_x: x방향으로의 단면적
h : 열전달 계수

Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling

Comparison

Fourier 법칙; 고체내의 열전도

$$\vec{q}_x = -kA_x \frac{dT}{dx}$$

전도에서, 열전달 방향은
온도 구배의 반대방향

열전도도 k 는 물질의
고유한 성질 – 물질마다
고유한 값을 가진다.
k 는 온도에 민감할 수 있다.

Newton 법칙; 고체와 유체 사이의 열 전달 (대류)

$$\vec{q}_x = hA_s \Delta T$$

대류에서 열전달은
고체와 주위의 온도
차이에 의해 발생한다.

열전달 계수 h는
1. 고체 표면의 기하학적 형태
2. 대류 현상의 매질로 작용하는 유체의 성질

에 따라서 달라진다.

열전도도의 온도 의존성

$$\vec{q}_x = -kA_x\frac{dT}{dx}$$

Units of thermal conductivity in SI:

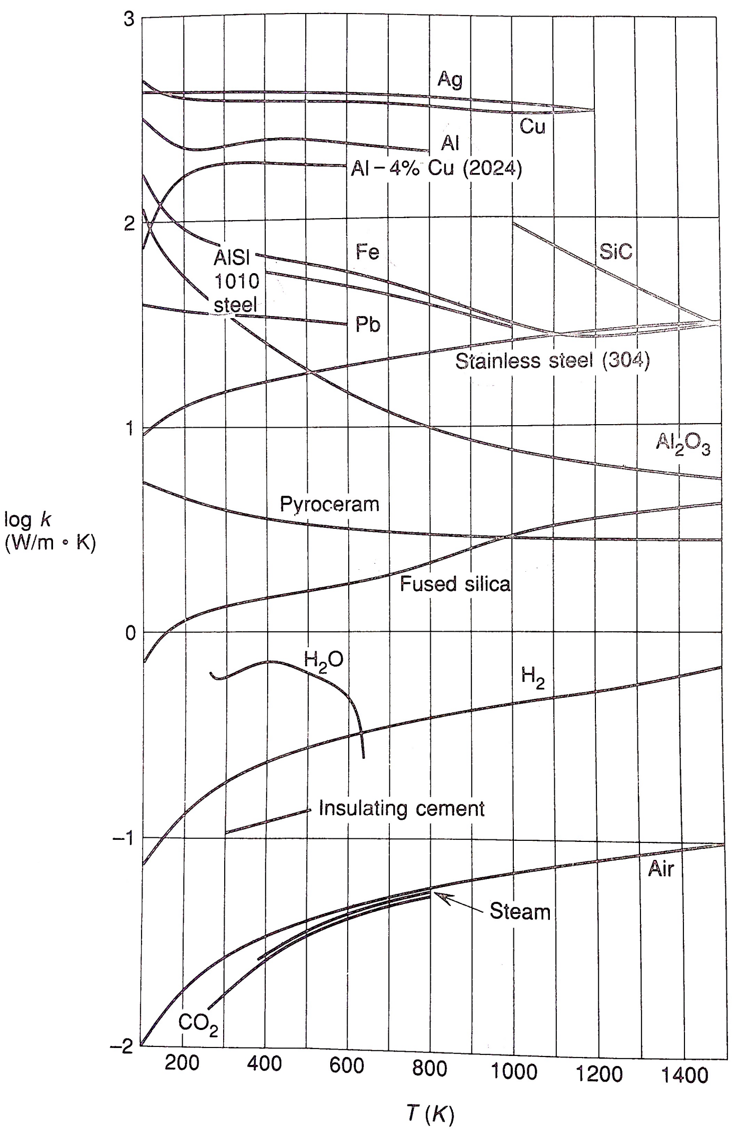
$W/(m \cdot K)$
$J/(s \cdot m \cdot K)$

$[W] = [J/s]$

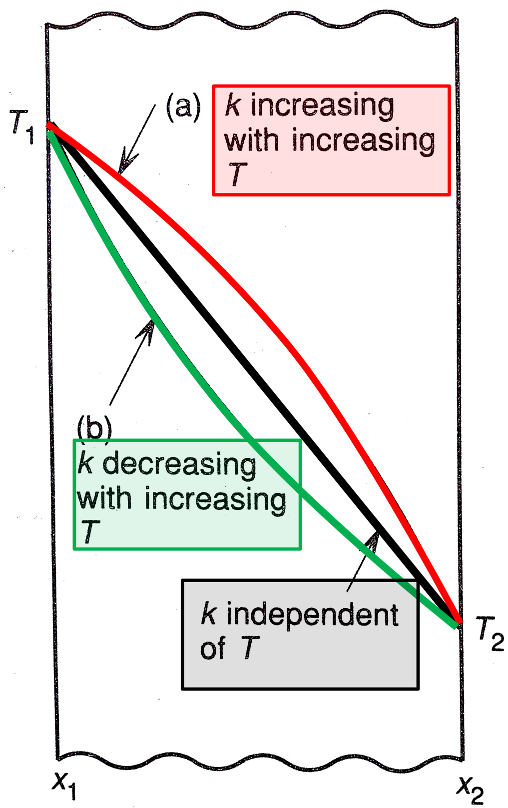
$$\vec{q}_x(공간) = -kA_x\frac{dT(공간)}{dx}$$

$$\vec{q}_x(x) = -kA_x\frac{dT(x)}{dx}$$

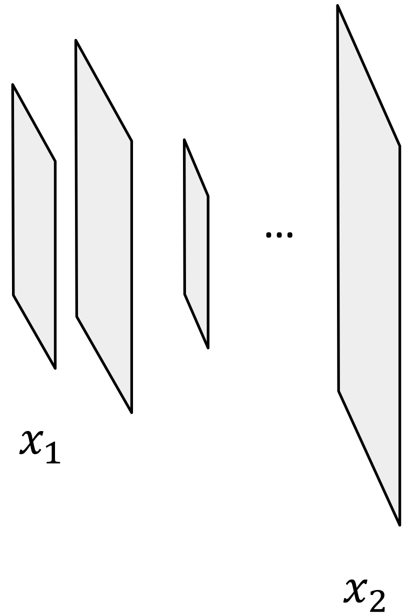
$$\vec{q}_x(x) = -k(T)A_x\frac{dT(x)}{dx}$$



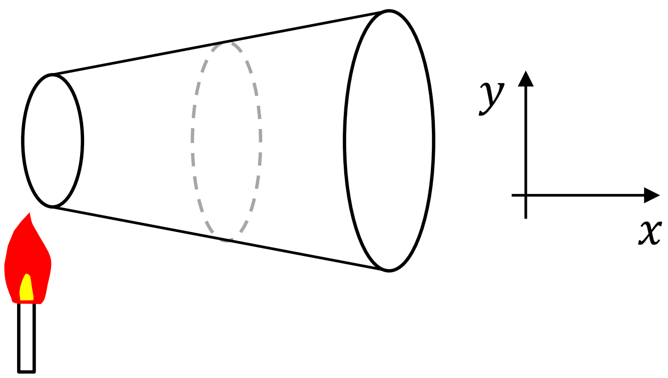
온도 의존성 열전도도 + 공간 의존적 열전달 면적

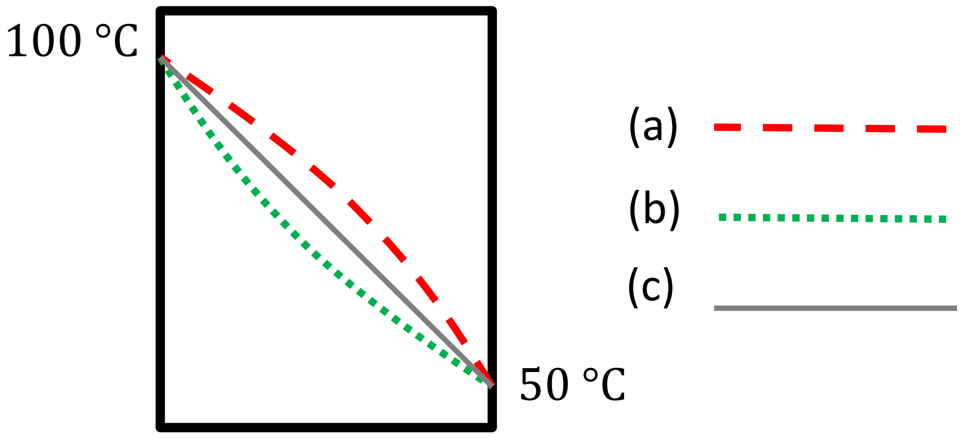


k 의 온도 의존성으로 인한 온도 구배의 변화



열 전달 단면적의 공간 의존성: $A_x(x)$




100 °C
50 °C
(a)
(b)
(c)

온도 의존성 열전도도 + 공간 의존적 열전달 면적

$$\vec{q}_x(x) = -k(T)A_x \frac{dT}{dx}$$

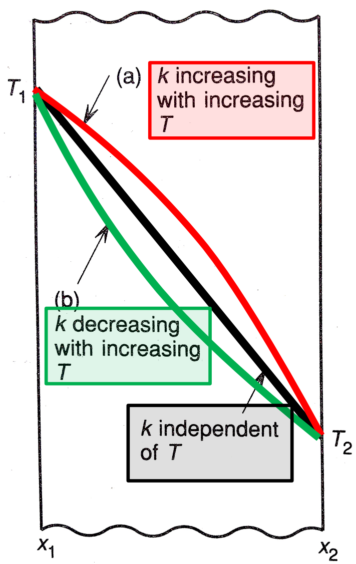
공간 의존 항들은 왼쪽

온도 의존 항들은 오른쪽

$$\frac{\vec{q}_x(x)}{A_x} dx = -k(T)\, dT$$

경계 조건 고려하여 적분

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\vec{q}_x}{A_x} dx = \int_{T_1}^{T_2} -k(T) dT$$



정상 상태에서 $\vec{q}_x$ 고정

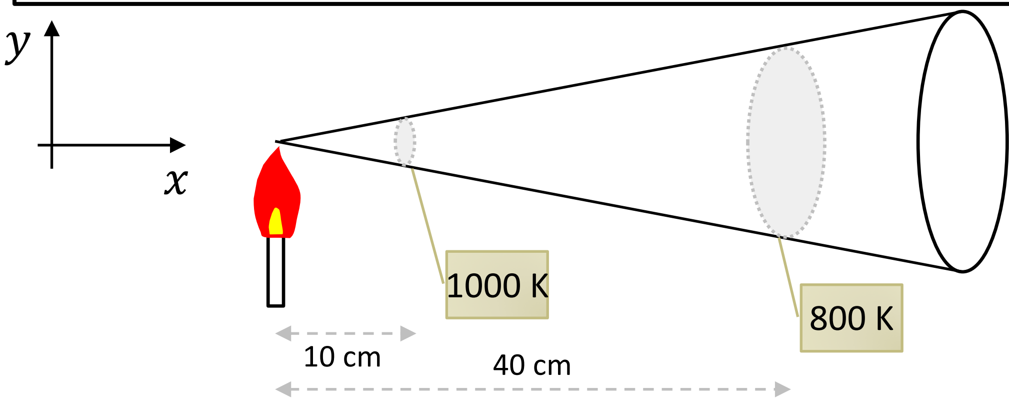
$$\vec{q}_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x} = \int_{T_1}^{T_2} -k(T) dT$$

평균 열전도도 k_m 을 사용한다면…

$$\vec{q}_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x} = -k_m \cdot (T_2 - T_1)$$

예제 6.1

대류가 발생하는 환경에서 (표면이 절연체로 둘러싸인) 원추형(cone) 전도체에 열전도로 인한 열전달 현상이 x방향으로 발생하고 있다 – 아래의 그림 참조.



Observation 1: 열원으로부터 10 cm 떨어진 곳의 온도를 측정하였더니 온도가 1000 K 였다.

Observation 2: 열원으로부터 40 cm 떨어진 곳의 온도를 측정하였더니 온도가 800 K 였다.

위 전도체는 a) Fourier 법칙을 따르며; b) 열전도도의 온도 의존성이 없이 5 $W/(m \cdot K)$ 이고; c) 원뿔의 단면적은 열원으로부터의 거리(δ)와 다음과 같은 관계가 있다.

$$A_x|_{x=\delta} = \pi\delta^2$$

Q1. 이를 바탕으로 해당 원뿔상에서 거리에 따른 온도 변화를 나타내시오. 즉 온도를 거리(x)에 대한 함수로 표현하시오.

$$\vec{q}_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x} = -k_m \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\vec{q}_x \int_{10\ cm}^{40\ cm} \frac{dx}{\pi x^2} = -k_m \cdot (800\ K - 1000\ K)$$

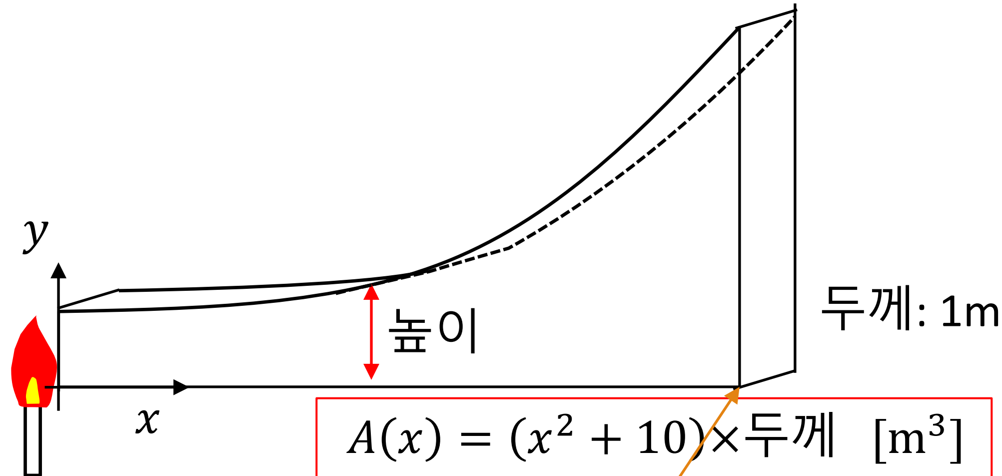
$$\vec{q}_x \cdot (-1)\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{10}\right)[1/cm] = -5\left[\frac{J}{s \cdot m \cdot K}\right] \cdot (800\ K - 1000\ K)$$

$$\vec{q}_x = \left(\frac{4000\pi}{3}\right)\left[\frac{J}{s}\right]$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = f(t_i, y_i)$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n)$$

Apply Euler method to solve…

$$T(x=0) = 1000[K]$$
k=5 $\left[\frac{W}{m\cdot K}\right]$
$$\vec{q}_x(x) = 100\, J/s$$



여기 끝(x=10 [m])에서
온도는 몇도?

$$\vec{q}_x(x) = -kA_x\frac{dT}{dx}$$

$$100 = -k(x^2+10)\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f(x_i, y_i)$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + \Delta x\, f(x_n, y_n)$$

$$\frac{100}{-k(x^2+10)}dx = dT \rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{100}{-k(x^2+10)}$$

Continued

$$T(x=0) = 1000[K]$$
$$\mathrm{k} = 5\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$$
$$\vec{q}_x(x) = 100\, J/s$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f(x_i, y_i)$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + \Delta x\, f(x_n, y_n)$$

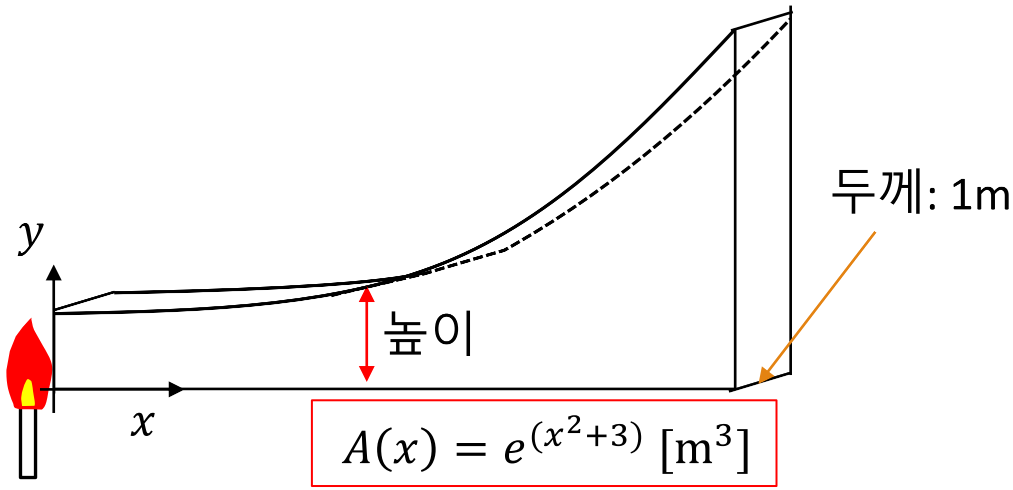
$$\frac{dT}{dx} = \frac{100}{-k(x^2+10)}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta x \frac{100\left[\frac{J}{s}\right]}{-k(x_0^2+10)} = 1000[K] + \Delta x \frac{100\left[\frac{J}{s}\right]}{-k(0+10)}$$

$$y_2 = y_1 + \Delta x \frac{100\left[\frac{J}{s}\right]}{-k(x_1^2+10)}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \Delta x \frac{100\left[\frac{J}{s}\right]}{-k(x_n^2+10)}}$$

과제



전기적 상사(similitude)

열 전도(thermal conduction)는 전기적 전도 (electric conduction) 현상과 비슷한 면이 있다.

Ohm's law

$$\frac{\Delta V}{\vec{I}} = R$$

전류($\vec{I}$)를 일으키는 구동력은 전압의 차이 (ΔV)이다. 그리고 전기전도의 매질은 전하의 흐름(전류)에 대한 저항 R을 가진다.

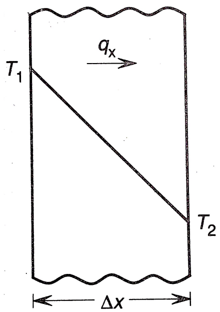
Thermal Conduction

$$\frac{\Delta T}{\vec{q}} = R$$

열흐름($\vec{q}$)를 일으키는 구동력은 온도의 차이 (ΔT)이다. 그리고 열전달의 매질은 열의 흐름에 대한 저항 R을 가진다.

$$\frac{\text{구동력}}{\text{유속}} = \text{유동에 대한 저항}$$

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k$$

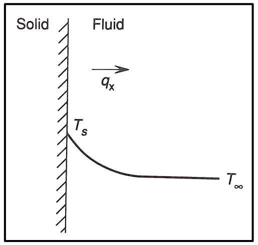


Slide #12

$$\vec{q}_x \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x} = -k_m \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k = \frac{1}{k_m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A_x}$$

유사하게, 대류를 통한 열이동에서도...



$$\frac{-(T_\infty - T_s)}{\vec{q}_x} = R_k$$

Slide #8

$$\vec{q}_x = hA_s(T_s - T_\infty)$$

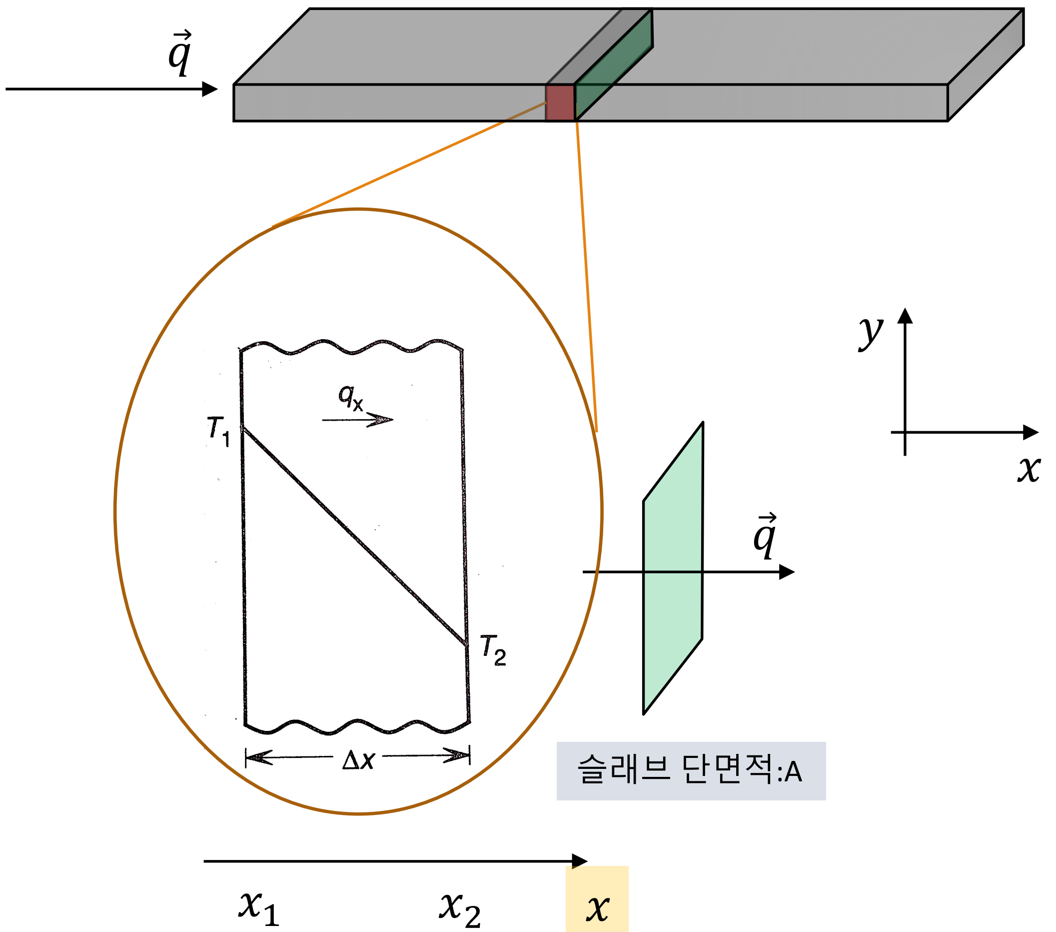
$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k = \frac{1}{hA_s}$$

전도에 의해 슬래브를 통과하는 열흐름

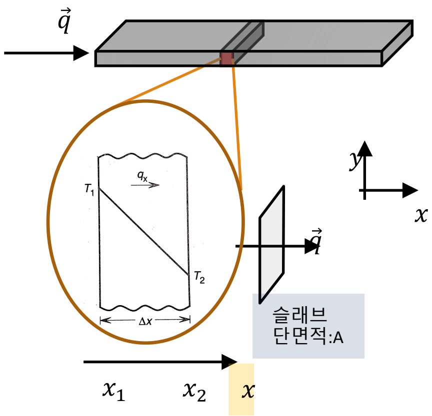
$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k = \frac{1}{k_m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A_x}$$

슬라브의 열전도도

열전도 방향으로의 단면적



전도에 의해 슬래브를 통과하는 열흐름



$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k = \frac{1}{k_m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A_x}$$

슬래브의 단면적이 일정하므로, A_x는 x 좌표에 무관

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = \frac{1}{A \cdot k_m}\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{(x_2 - x_1)}{A \cdot k_m}$$

$$\frac{q_x}{A} = -\frac{k_m(T_2 - T_1)}{x_2 - x_1}$$

일치

$$\vec{q}_x = -kA_x\frac{dT}{dx}$$

Fourier's law

$\frac{q_x}{A}$를 단위면적당 열이동률 (또는 열유속; heat flux) q_x' 으로 표현하면

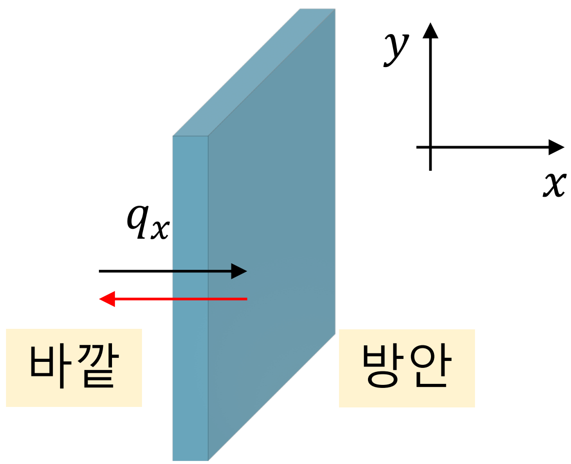
$$q_x' = -\frac{k_m(T_2 - T_1)}{x_2 - x_1}$$

예제 6.2

- 방에 있는 유리창의 안쪽과 바깥쪽의 온도는 각각 $25°C$와 $0°C$ 이다. 유리의 두께는 5mm 이고, 평균 열전도도는 $0.84\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$이다. 유리창을 통하여 전도에 의하여 잃는 '단위면적당의 손실열'을 계산하라.

- 단위 면적당의 손실열? $\frac{q}{A}$ $(\mathrm{i.e.}, q')$

- 바깥쪽의 좌표와 온도 각각 $x_1(=0mm), T_1(=273K)$ 그리고 안쪽의 좌표와 온도를 $x_2(=0+5mm), T_2(298K)$라 하면...



$$\frac{q_x}{A_x} = q_x' = -\frac{k_m(T_2 - T_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{에서}$$

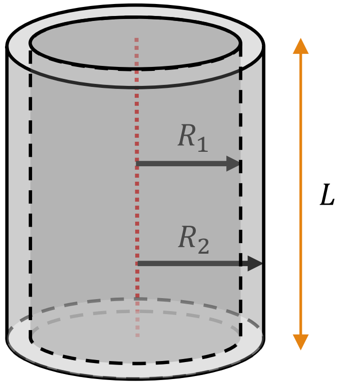
$$q_x' = -0.84\ [W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}]\frac{(298[K] - 273[K])}{5\ [mm] - 0[mm]}$$

$$q_x' = -0.84\ [W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}]\frac{25[K]}{5\ [mm]}$$

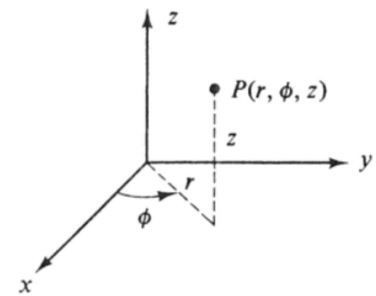
$$= -0.84\times 5\left[\frac{W}{10^{-3}m^2}\right] = -4.2\times 10^3\left[\frac{W}{m^2}\right]$$

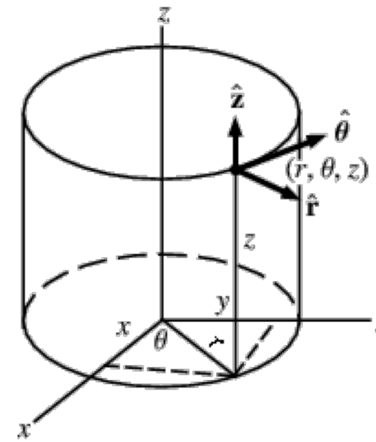
속이 빈 원통형벽을 통한 열흐름

내경 R_1, 외경 R_2, 길이가 L
인 가운데가 빈 원통



$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = R_k = \frac{1}{k_m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{A_x}$$





원통내의 균일한 온도 T_1,
바깥면의 온도 T_2. 그리고
$T_1 > T_2$ 라면

따라서 온도가 높은
내부에서 온도가 낮은
외부로 열이 흐른다.

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_r} = \frac{1}{k_m}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{A_r}$$

$$A_r = A(r) = 2\pi r \times L$$

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_r} = \frac{1}{k_m}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2\pi r L}\,dr$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi L \cdot k_m}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}dr$$

$\vec{\mathbf{q}} = -k \cdot A \cdot \vec{\nabla} T$ 열흐름 벡터 $\vec{\mathbf{q}}$ 와
온도 구배 $\vec{\nabla} T$ 는 서로 반대 방향

$$\frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \cdot k_m}$$

예제 6.3

❑내경이 3cm, 외경이 5cm인 유리관을 통하여 뜨거운 물이 흐른다. 유리관의 안쪽 온도는 90 °C, 바깥은 85°C이고, 유리의 평균 열전도도는 0.84 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$이다.

❑Qa) 단위길이당 유리관으로부터 열손실률 q_r''을 계산하라.

$$\frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \cdot k_m}$$

→

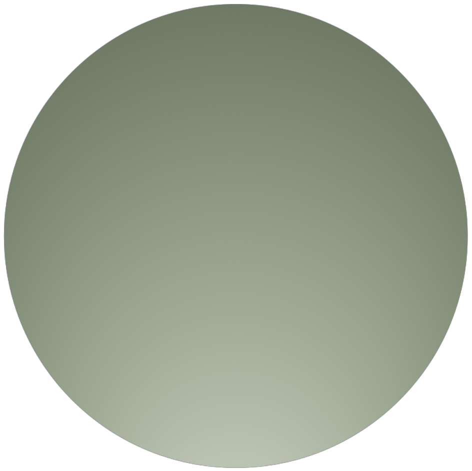
$$q_r'' = \frac{q_r}{L} = \frac{(T_1 - T_2) \cdot (2\pi) \cdot k_m}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

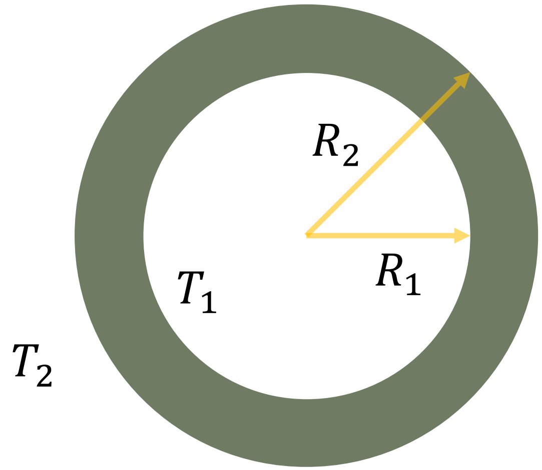
❑Qb) 벽 두께가 두배가 된다면 (e.g., 2cm → 4 cm), 단위길이당 열손실률은 어떻게 변하는가?

$$\frac{q''_{r,(b)}}{q''_{r,(a)}} = \frac{\ln\left(\frac{R_{2,(a)}}{R_{1,(a)}}\right)}{\ln\left(\frac{R_{2,(b)}}{R_{1,(b)}}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{3}\right)} \approx 0.602$$

기존의 약 60% 정도로 감소한다.
½ 즉 50%가 되지 않았다. 단순히 두께와 비례적으로 바뀌지 않았다.
왜?

속이 빈 구벽을 통한 열흐름





$T_1 > T_2$

$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_r} = \frac{1}{k_m}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{A_r}$$

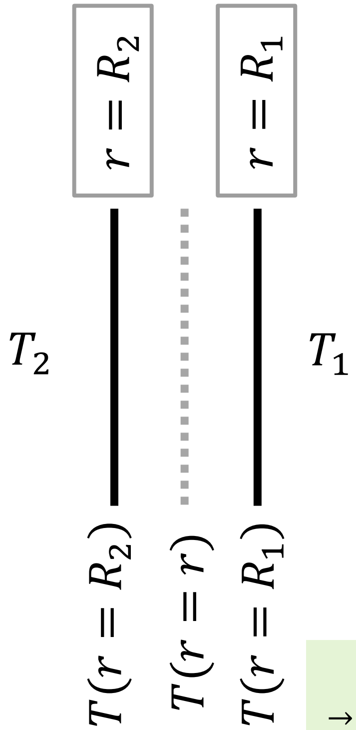
$$\rightarrow \frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = 1/k_m \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi r^2} dr$$

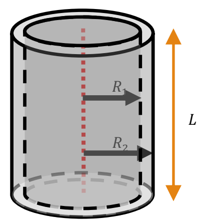
$$\rightarrow \frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{1}{4\pi k_m}\left(\frac{1}{-1}\right)(r^{-1})\Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$\rightarrow \frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{-1}{4\pi k_m}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Recap) 전도에 대한 기하학적 영향

- $T = T(r = r)$와 $T = T_1(r = R_1)$ 사이 에서..





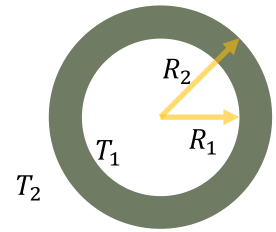
$$\frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L \cdot k_m}$$

$$\vec{q}_r = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2\pi L \cdot k_m$$

$$\rightarrow \frac{(T_1 - T)}{\vec{q}_r} = \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{2\pi L \cdot k_m}$$

$$\rightarrow \frac{(T_1 - T)}{\frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2\pi L \cdot k_m} = \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{2\pi L \cdot k_m}$$

$$\rightarrow T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$



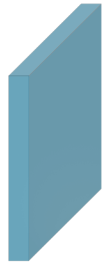
$$\frac{(T_1 - T_2)}{\vec{q}_r} = \frac{-1}{4\pi k_m}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\vec{q}_r = 4\pi k_m (T_1 - T_2) \frac{R_1 R_2}{-R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow \frac{(T_1 - T)}{\vec{q}_r} = \frac{-1}{4\pi k_m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\rightarrow T_1 - T = \frac{-1}{4\pi k_m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) 4\pi k_m (T_1 - T_2) \frac{R_1 R_2}{-R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow T = T_1 + \left(\frac{R_1 - r}{r}\right)(T_1 - T_2)\frac{R_2}{-R_1 + R_2}$$



$$\frac{-(T_2 - T_1)}{\vec{q}_x} = \frac{(x_2 - x_1)}{A \cdot k_m}$$

$$q'_x = \frac{q_x}{A} = -\frac{k_m (T_2 - T_1)}{x_2 - x_1}$$

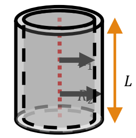
$$\frac{-(T - T_1)}{\vec{q}_x} = \frac{(x - x_1)}{A \cdot k_m}$$

$$T - T_1 = A \frac{k_m (T_2 - T_1)}{x_2 - x_1} \frac{(x - x_1)}{A \cdot k_m}$$

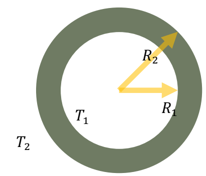
$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

온도 분포

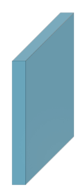
$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

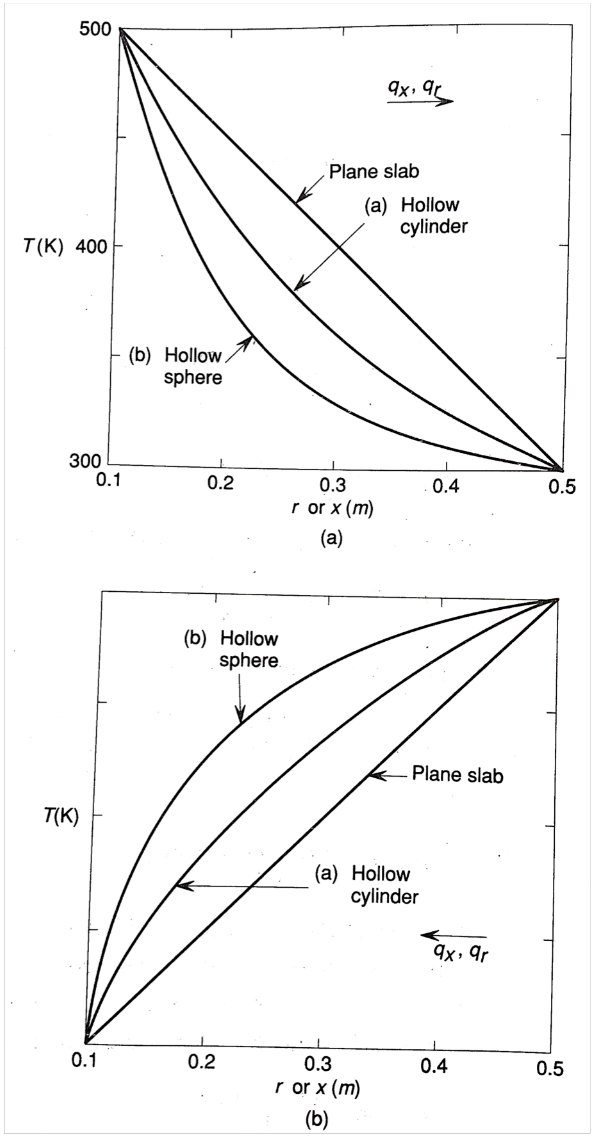


$$T = T_1 + \left(\frac{R_1 - r}{r}\right)(T_1 - T_2)\frac{R_2}{-R_1 + R_2}$$



$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$





$$With\ R_1 = 1, R_2 = 2\ and\ T_1 = 2, T_2 = 1$$

$$T = T_1 + \left(\frac{R_1 - r}{r}\right)(T_1 - T_2)\frac{R_2}{-R_1 + R_2}$$

$$T = 2 + \left(\frac{1 - r}{r}\right)(2 - 1)\frac{2}{-1 + 2}$$

$$T = 2 + \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot 2 = \frac{2}{r}$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

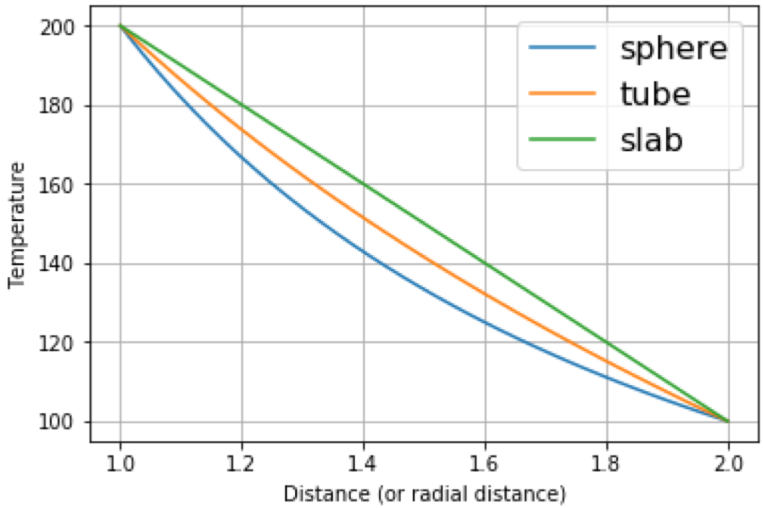
$$T = 1 - (1 - 2) \cdot \frac{\ln\left(\frac{r}{2}\right)}{\ln(2)} = 2 - \frac{1}{\ln(2)}(\ln \mathrm{r} - \ln 2)$$

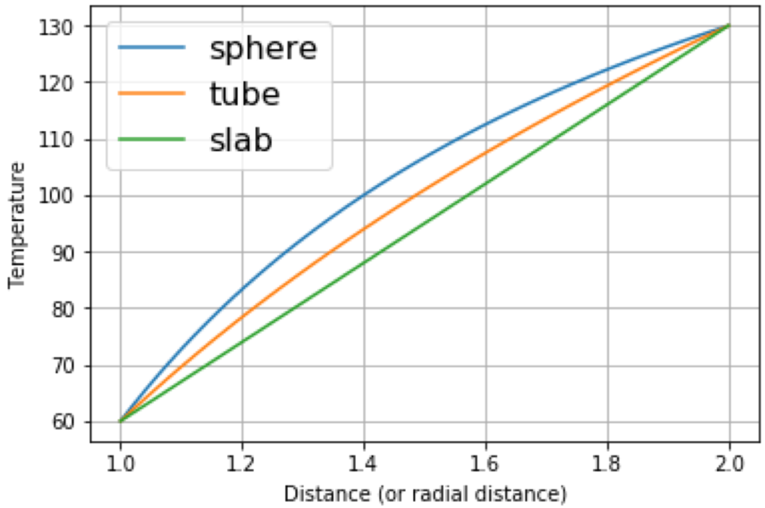
$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T = 2 + (1 - 2)\frac{(x - 1)}{2 - 1}$$
$$= 2 - (x - 1) = 3 - x$$

형상에 따른 온도 분포의 특성

❑Sphere, tube의 경우, radial 방향 좌표(즉, 열 통과 단면적까지 반지름 거리)가 정상상태의 온도구배에 영향을 준다. 따라서, sphere와 tube 형태의 구조물에서 열전도가 발생할 때, 정상상태에서의 온도구배는 공간(위치)에 따라 달라진다.

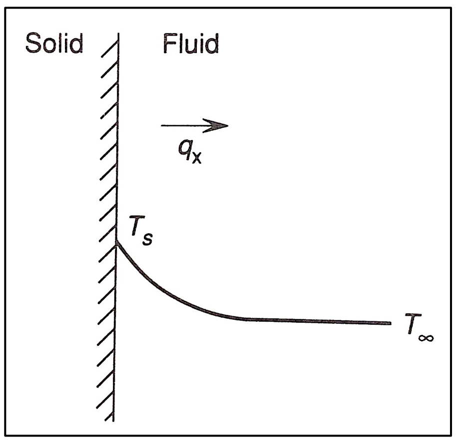


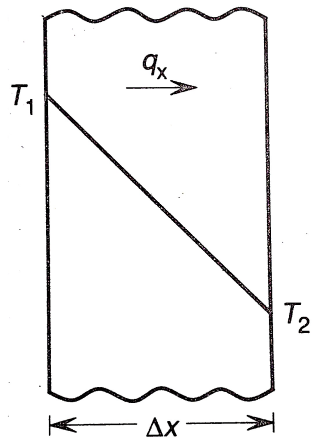


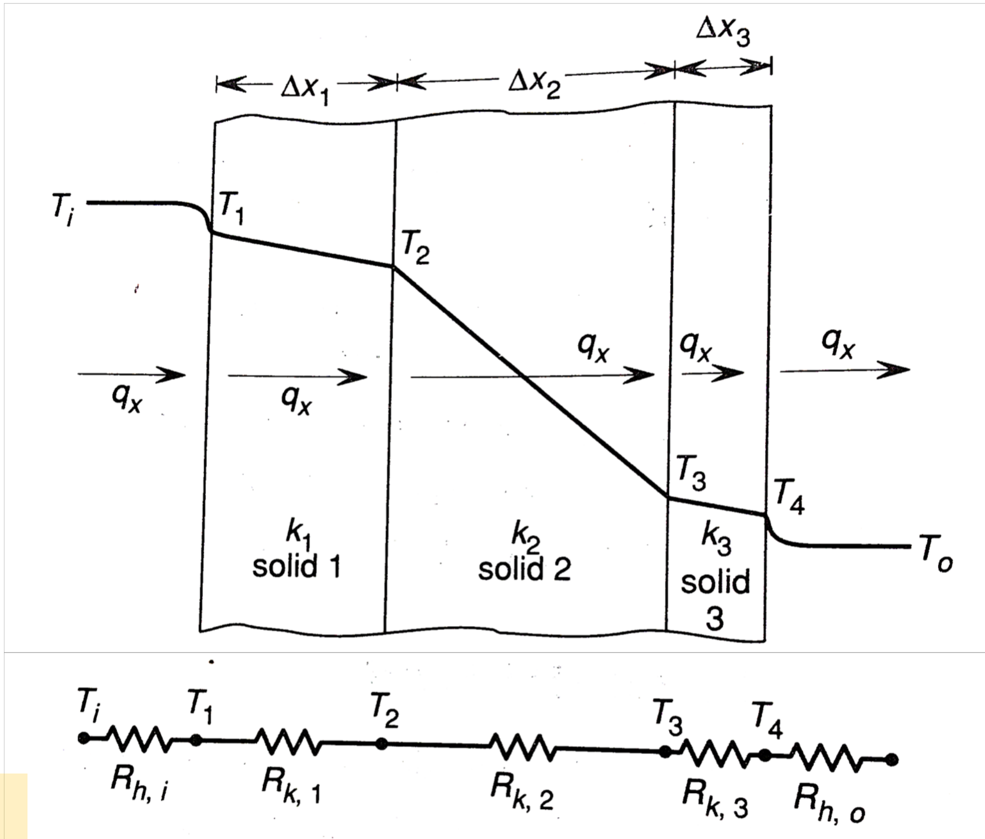
❑내경에서 외경방향으로 열 흐름이 발생하는 경우, 반지름이 작은 쪽에서 '단면적이' 더 작고 반지름이 커짐에 따라 열흐름의 단면적이 커진다. 따라서, 외경방향으로 이동할 수록 열전달률 값이 높아진다. 이경우에 열 전달 거동이 정상상태로 발달된 후 온도 분포를 살펴보면, 외경보다 내경에서 온도 구배가 더 급하게 나타남을 예상할 수 있다.

복합 벽면(composite wall)을 통한 열전달

- 열전도도가 서로 다른 다양한 재료로 구성된 복합 벽면을 통한 열전달
- 고온의 내부 유체에서 첫번째 벽까지 대류전달; 세 고체의 외벽 사이에서 전도; 마지막 고체에서 내부 저온의 유체로의 대류 전달.
- 대류는 Newton, 전도는 Fourier







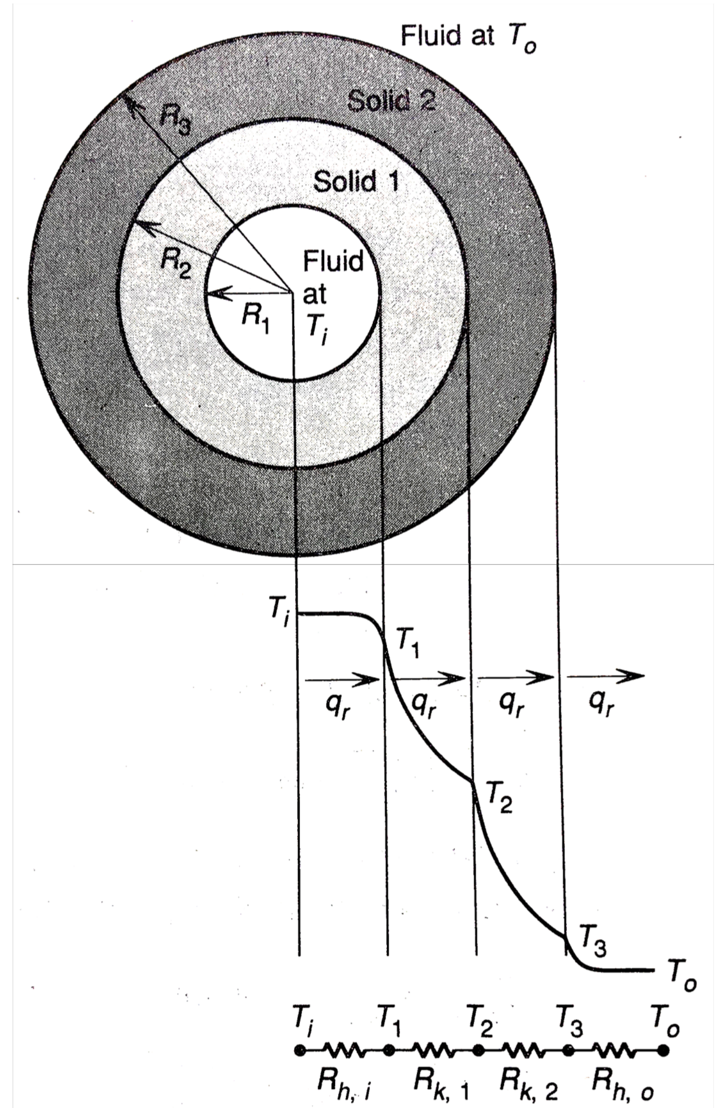
$$\rightarrow \frac{(T_i - T_0)}{\vec{q}_r} = Heat\ resistance$$

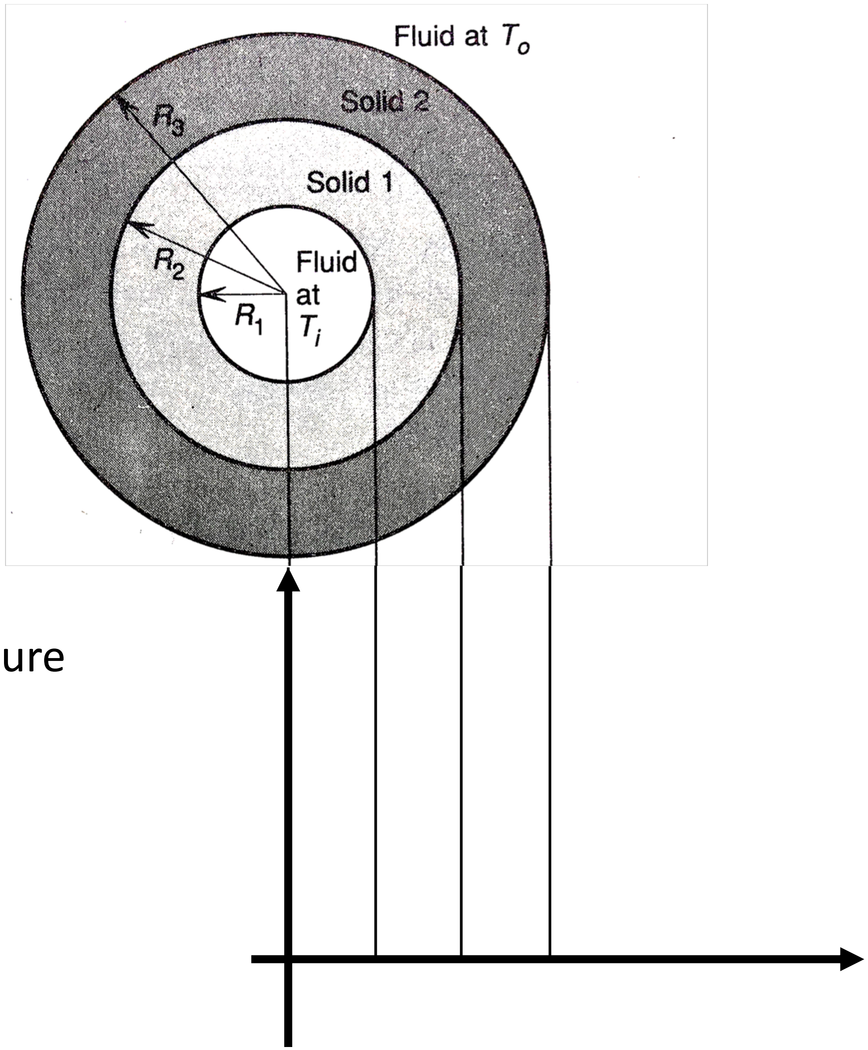
$$\rightarrow \frac{(T_i - T_0)}{\vec{q}_r} = R_{h,i} + R_{h,1} + R_{h,2} + R_{h,3} + R_{h,4} + R_{h,O}$$

복합 원통면

- 원통면은 비선형 온도 분포

온도 분포 곡선이 생김새





Temperature

열원이 존재하는 금속의 평형 열전도

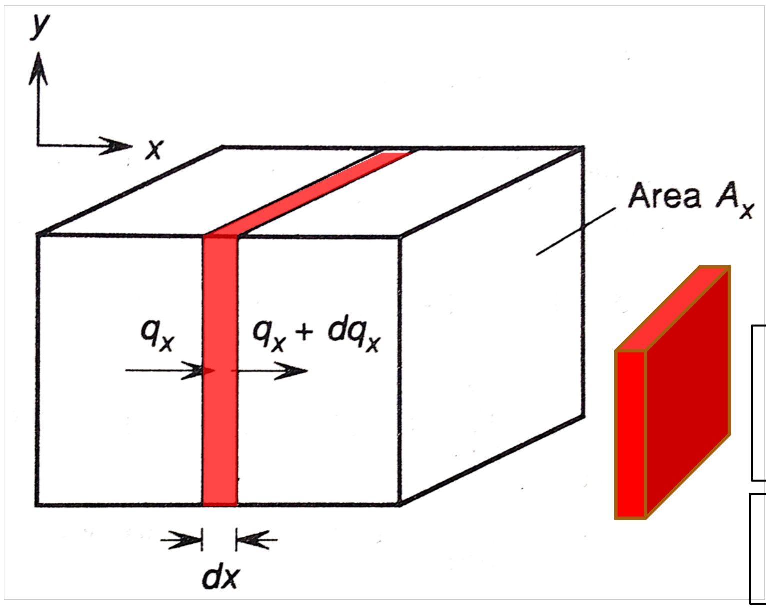
- 열원 (heat source)
- 전도가 발생하는 매질 (medium)내에서 열이 발생하면, 매질 내 온도 구배(temperature gradient)에 큰 영향을 미친다.

x방향으로 전도되는 1차원의 열흐름 모식도

$$\dot{q}\left[\frac{W}{m^3}\right]\ \left(\dot{q}=\frac{dq}{dt}\right)$$

단위 시간, 단위 부피 당 발생한 열의 양

$$[W]=\left[\frac{joule}{second}\right]$$



정상 상태(steady-state)에서
열 평형 조건을 만족한 열전도 현상은 다음을 만족해야 한다

들어온 열량+발생한 열량=나간 열량

왼편의 얇은 판 요소($dV = A_x dx$) 대상으로 생각해보면, dx 만큼 이동하는 동안 열량이 dq_x 만큼 변화. 따라서, 해당 요소내에 dq_x 만큼 빠짐.

열평형 조건을 만족한다면, 빠진만큼 발생하는 열이 있어야 한다.
예를 들어 고체내 열원에 의해 $\dot{q}$ 만큼 x방향으로 열이 발생한다면

$$dq_x = \dot{q}\cdot A_x\cdot dx$$

열원이 존재하는 금속의 평형 열전도

$$\vec{q}_x = -k_m A_x \frac{dT}{dx}$$

$$dq_x = \dot{q} \cdot A_x \cdot dx$$

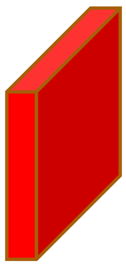
$$\dot{q} \cdot A_x \cdot dx = d\left(-k_m A_x \frac{dT}{dx}\right)$$

$$\dot{q} \cdot A_x \cdot dx = -k_m d\left(A_x \frac{dT}{dx}\right)$$

$$\frac{\dot{q}}{k_m} \cdot dx = -\frac{1}{A_x} \cdot d\left(A_x \frac{dT}{dx}\right)$$

$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{A_x} \cdot \frac{d\left(A_x \frac{dT}{dx}\right)}{dx}$$

Example) 열이 발생하는 금속 슬라브의 전도



x 방향 단면적 A_x가 x에 대해 무관하게 일정하다.

$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{d\left(\frac{dT}{dx}\right)}{dx} = -\frac{d^2T}{dx^2}$$

x 에 대해 적분

$$\frac{\dot{q} \cdot x}{k_m} = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \mathrm{C}_1$$

한번 더 x 에 대해 적분

$$\frac{\dot{q} \cdot \frac{1}{2} x^2}{k_m} = -T + \mathrm{C}_1 \cdot x + C_2$$

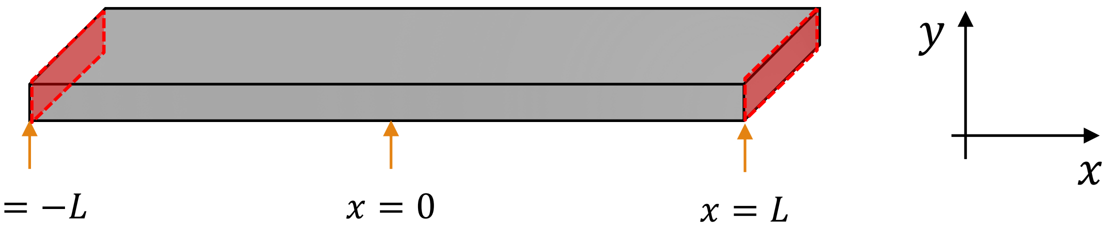
얻어진 식에 경계조건(특정 지점에서 온도 값)을 적절히 사용하면, 위치(x)에 따라 달라지는 온도 T의 분포를 알 수 있다.

열이 발생하는 금속 슬라브의 전도

$$\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}x^2}{k_m} = -T + C_1\cdot x + C_2$$

$$T = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}x^2}{k_m} + C_1\cdot x + C_2$$

얻어진 식에 경계조건을 줘보자, 예를 들어,



At $x = -L$

$$T = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L + C_2$$

At $x = L$

$$T = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} + C_1\cdot L + C_2$$

$$-\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L + C_2 = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} + C_1\cdot L + C_2$$

$$2C_1L = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

만약 $x = \pm L$에서 온도가 T_s로 동일하다면?

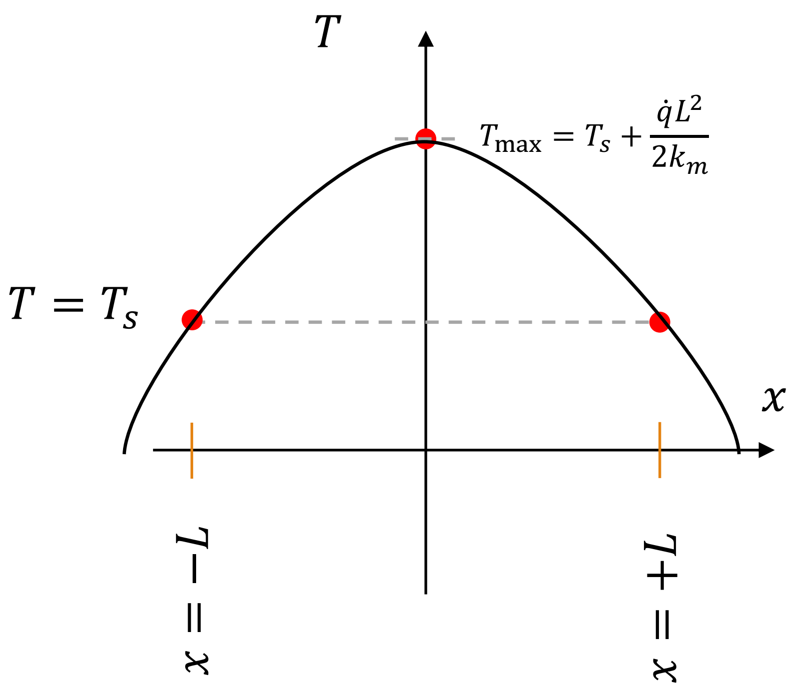
$$T_s = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} + C_2$$

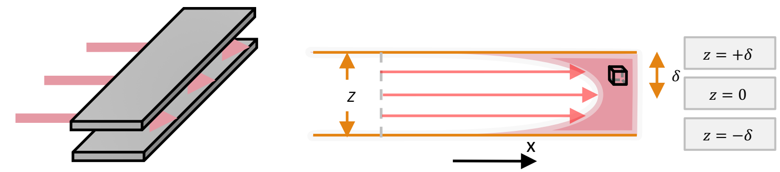
$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m}$$

$$T = T_s + \frac{\dot{q}\,(L^2 - x^2)}{2\cdot k_m}$$

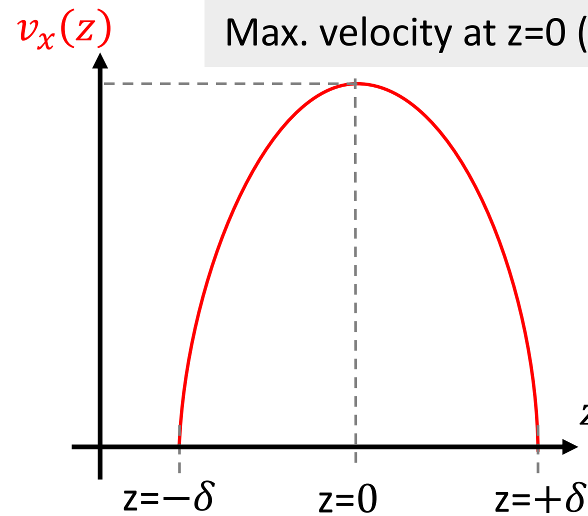
열이 발생하는 금속 슬라브의 전도

$$T = T_s + \frac{\dot{q}\,(L^2 - x^2)}{2 \cdot k_m}$$

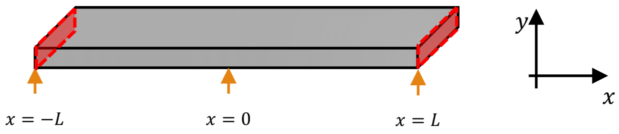




$$\rightarrow v_x(z) = \frac{\Delta P}{L}\,\frac{\delta^2 - z^2}{2\eta}$$

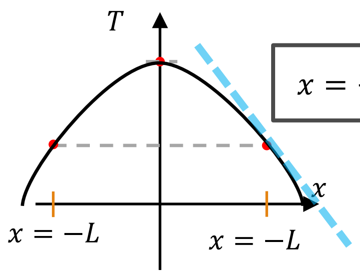


열이 발생하는 금속 슬라브의 전도



금속 슬라브내에 열발생이, 단위 체적당 $\dot{q}$의 rate로 발생하고 있다. 슬라브 전체에서 발생한 총 열은? $x = 0$ 에서 $x = L$ 쪽으로 나가는 열을 구한다음 그의 2배가 슬라브 전체 발생 총 열량이 된다.

$$\dot{q} \cdot volume = \dot{q} \cdot Area \cdot 2L$$



$x = +L$에서의 $\frac{dT}{dx}$?

From slide #30

$$T = T_s + \frac{\dot{q}\,(L^2 - x^2)}{2 \cdot k_m}$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{\dot{q}\,(-2x)}{2 \cdot k_m} = -\frac{\dot{q}x}{k_m}$$

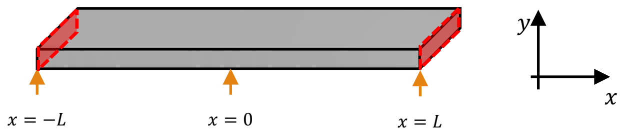
$$\therefore at\ x = L, \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}L}{k_m}$$

$x = L$에서 단면적을 통하여 열이 통과하는 rate는?

$$q_x = -k_m \cdot A_x \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$q_x = k_m \cdot A_x \cdot \frac{\dot{q}L}{k_m}$$

예제 6.6



- 정상 상태 (steady-state)
- 길이 $2L = 0.1\text{m}$, 단면적 $1\ \text{m}^2$ 의 평평한 slab가 250,000 W/m³의 rate로 열을 발생시킨다.
- $x = \pm L$인 양끝지점에서 모두 공기($T_\infty = 15°C$)와 접한다.
- 양끝지점 면의 열전달 계수(h)가 60 $\frac{W}{m^2 K}$이다.
- 슬라브의 열전도도(k_m)는 25 $\frac{W}{m \cdot K}$ 이다.

Q. 슬라브의 온도 분포, 즉 T의 x에 대한 함수를 구하시오.

슬라브의 온도 분포식:

$$T = T_s + \frac{\dot{q}\,(L^2 - x^2)}{2 \cdot k_m}$$

T_s는 얼마 인가?

표면(at $x = \pm L$)에서 대류에 의한 열전달:

$$\frac{T_s - T_\infty}{q_x'} = \frac{1}{h}$$

표면(at $x = \pm L$)에서 대류에 의한 열전달:

$$\frac{T_s - 288K}{q_x'} = \frac{1}{60\ \text{Wm}^{-2}\text{k}^{-1}}$$

q_x': 면으로 전달되는 열의 율?

정상 상태이므로, 슬라브에서 발생한 열율은 끝면으로 빠져나가는 열률과 동일해야 한다.

$$q_x' \cdot Area = \dot{q} \cdot Volume$$
$$\rightarrow q_x' \cdot 1m^2 \times 2 = \dot{q} \cdot 0.1\ m^3$$
$$\rightarrow q_x' = \dot{q} \cdot 0.05\ m = 250{,}000 \frac{W}{m^3} \times 0.05m$$
$$\rightarrow q_x' = 12{,}500\ W/m^2$$

$$\frac{T_s - 288K}{12{,}500\ W/m^2} = \frac{1}{60\ \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}}$$

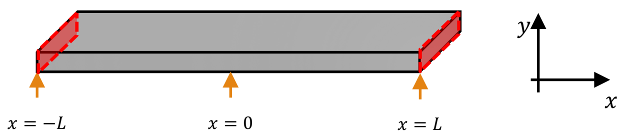
$$T_s = 288K + \frac{12{,}500\ W/m^2}{60\ Wm^{-2}k^{-1}}$$
$$\rightarrow T_s = 288K + \frac{1{,}250}{6} K \approx 496.3\ K$$

슬라브의 온도 분포식:

$$T = 496.3K + \frac{\dot{q}\,(L^2 - x^2)}{2 \cdot k_m}$$

비대칭조건의 슬라브

- 양끝면의 열전달 조건이 서로 다른 슬라브의 경우에는 앞서 살펴본 예와 달리, 비대칭적인 온도 분포가 나타난다.



- 정상 상태 (steady-state)
- 양끝면에서 매우 멀리 떨어진 유체의 온도는 T_∞로써 동일,
- At $x=-L$, 열전달 계수: h_1
- At $x=+L$, 열전달 계수: h_2 and $h_1 \neq h_2$

From Slide #28

$$T = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}x^2}{k_m} + C_1\cdot x + C_2$$

At $x=-L$

$$T_1 = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L + C_2$$

Eq. (1)

At $x=+L$

$$T_2 = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} + C_1\cdot L + C_2$$

Eq. (2)

Eq. (1)- Eq. (2)

$$T_1 - T_2 = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L + C_2 + \frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L - C_2$$

$$T_1 - T_2 = -C_1\cdot L - C_1\cdot L$$

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{-2L}$$

Eq. (1)+ Eq. (2)

$$T_1 + T_2 = -\frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} - C_1\cdot L + C_2 - \frac{\dot{q}\cdot\frac{1}{2}L^2}{k_m} + C_1\cdot L + C_2$$

$$T_1 + T_2 = \frac{-\dot{q}L^2}{k_m} + 2C_2$$

$$C_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\dot{q}L^2}{2k_m}$$

Continued

From Slide #28

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k_m} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$C_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\dot{q}L^2}{2k_m}$$

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{-2L}$$

From Slide #28

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k_m} + \frac{T_1 - T_2}{-2L}x + \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\dot{q}L^2}{2k_m}$$

$$\rightarrow T = \frac{\dot{q}(L^2 - x^2)}{2k_m} + \frac{T_2 - T_1}{2} \cdot \frac{x}{L} + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

온도 분포 T(x)

앞서 경험해 보았듯, **온도의 구배**가 중요한 역할한다. 구해보자.

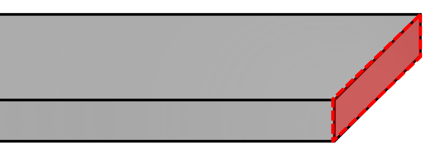
$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}x}{k_m} + \frac{T_2 - T_1}{2L}$$

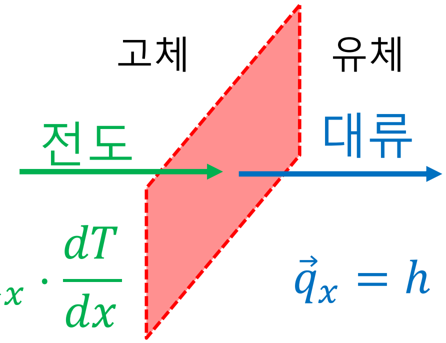
<u>At which x value,</u> T becomes maximum?

Answer: the x value leading to $\frac{dT}{dx} = 0$

$$-\frac{\dot{q}x}{k_m} + \frac{T_2 - T_1}{2L} = 0$$

$$x = \frac{T_2 - T_1}{2L}\frac{k_m}{\dot{q}}$$



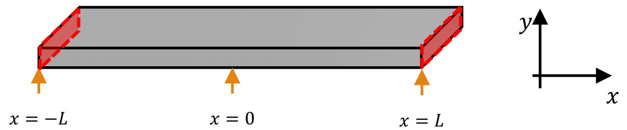


$$q_x = -k_m \cdot A_x \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\vec{q}_x = h \cdot A_x \cdot \Delta T$$

경계면에서 전도rate와 대류rate는 같아야 한다.

Continued



$$\text{At } x=+L,\quad -k_m\cdot A_x\cdot\frac{dT}{dx}\Big|_{\mathrm{x=+L}} = h|_{\mathrm{x=+L}}\cdot A_x\cdot\Delta T = h_2\cdot A_x\cdot(T_{x=+L}-T_\infty)$$

경계면에서
전도rate와 대류rate
는 같아야 한다.

$$\text{At } x=-L,\quad -k_m\cdot A_x\cdot\frac{dT}{dx}\Big|_{\mathrm{x=-L}} = h|_{\mathrm{x=-L}}\cdot A_x\cdot\Delta T = h_1\cdot A_x\cdot(T_\infty-T_{x=-L})$$

비대칭 슬라브 **온도의 구배**

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}x}{k_m}+\frac{T_2-T_1}{2L}$$

Eq. (a)

$$\text{At } x=+L,\quad -k_m\cdot A_x\cdot\left[-\frac{\dot{q}L}{k_m}+\frac{T_2-T_1}{2L}\right] = h_2\cdot A_x\cdot(\boldsymbol{T_2}-T_\infty)$$

$$\left[\dot{q}L+\frac{-T_2+T_1}{2L}k_m\right] = h_2\cdot\ (\boldsymbol{T_2}-T_\infty)$$

Eq. (b)

$$\text{At } x=-L,\quad -k_m\cdot A_x\cdot\left[\frac{\dot{q}L}{k_m}+\frac{T_2-T_1}{2L}\right] = h_1\cdot A_x\cdot(T_\infty-\boldsymbol{T_1})$$

$$\left[-\dot{q}L+\frac{-T_2+T_1}{2L}k_m\right] = h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})$$

실제 두 끝면에서의
온도 T_1과 T_2를 얻고
싶다.

Eq. (b)

$$(-T_2+T_1) = \frac{2L}{k_m}[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]$$

$$T_2 = -\frac{2L}{k_m}[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]+T_1$$

T_2 를 Eq. (a)에 대입

$$\left[\dot{q}L+\frac{-\left\{-\frac{2L}{k_m}[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]+T_1\right\}+T_1}{2L}k_m\right] = h_2\cdot\left(-\frac{2L}{k_m}[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]+T_1-T_\infty\right)$$

$$\left[\dot{q}L+\frac{-\{-2L[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]+T_1k_m\}+T_1k_m}{2L}\right] = h_2\cdot\left(-\frac{2L}{k_m}[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]+T_1-T_\infty\right)$$

$$[\dot{q}L+[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})+\dot{q}L]] = h_2\cdot\left(\left[\frac{-2Lh_1}{k_m}\cdot(T_\infty-\boldsymbol{T_1})-\frac{2\dot{q}L^2}{k_m}\right]+T_1-T_\infty\right)$$

$$[2\dot{q}L+[h_1\cdot\ (T_\infty-\boldsymbol{T_1})]] = h_2\cdot\left(\left(\frac{-2Lh_1}{k_m}-1\right)\cdot(T_\infty-\boldsymbol{T_1})-\frac{2\dot{q}L^2}{k_m}\right)$$

$T_1 \& T_2$

$$[2\dot{q}L + [h_1 \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1})]] = h_2 \cdot \left(\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right) \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) - \frac{2\dot{q}L^2}{k_m}\right)$$

$$2\dot{q}L + [h_1 \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1})] = h_2\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right) \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) - \frac{2\dot{q}L^2h_2}{k_m}$$

$$h_1 \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) - h_2\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right) \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) = -\frac{2\dot{q}L^2h_2}{k_m} - 2\dot{q}L$$

$$\left[h_1 - h_2\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right)\right] \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) = -\frac{2\dot{q}L^2h_2}{k_m} - 2\dot{q}L$$

$$(T_\infty - \boldsymbol{T_1}) = \frac{-\frac{2\dot{q}L^2h_2}{k_m} - 2\dot{q}L}{\left[h_1 - h_2\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right)\right]}$$

$$(T_\infty - \boldsymbol{T_1}) = \frac{-2\dot{q}L^2h_2 - 2\dot{q}Lk_m}{\left[h_1 - h_2\left(\frac{-2Lh_1}{k_m} - 1\right)\right]k_m}$$

$$(T_\infty - \boldsymbol{T_1}) = \frac{-2\dot{q}L^2h_2 - 2\dot{q}Lk_m}{[k_mh_1 - h_2(-2Lh_1 - k_m)]}$$

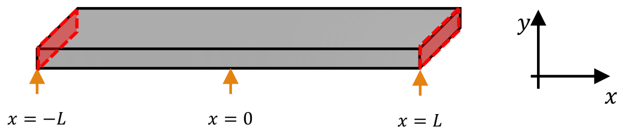
$$\boldsymbol{T_1} = T_\infty + \frac{2\dot{q}L(Lh_2 + k_m)}{[k_mh_1 + 2Lh_1h_2 + k_mh_2]}$$

$$\boldsymbol{T_1} = T_\infty + \frac{2\dot{q}L^2h_2 + 2\dot{q}Lk_m}{[k_mh_1 + h_2(2Lh_1 + k_m)]}$$

$$\boldsymbol{T_1} = T_\infty + \frac{2\dot{q}L(Lh_2 + k_m)}{k_m(h_1 + h_2) + 2Lh_1h_2}$$

$$T_2 = -\frac{2L}{k_m}[h_1 \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) + \dot{q}L] + T_1$$

예제 6.6 변형



- 정상 상태 (steady-state)
- 길이 $2L = 0.1\mathrm{m}$, 단면적 $1\ \mathrm{m}^2$ 의 평평한 slab가 $250{,}000\ \mathrm{W/m^3}$의 rate로 열을 발생시킨다.
- $x = \pm L$인 양끝지점에서 모두 공기($T_\infty = 15°C$)와 접한다.
- 양끝지점 면의 열전달 계수가 $h_1 = 30\ \frac{W}{m^2K}$ 그리고 $h_2 = 90\ \frac{W}{m^2K}$ 이다.
- 슬라브의 열전도도(k_m)는 $25\ \frac{W}{m \cdot K}$ 이다.

$$\boldsymbol{T_1} = T_\infty + \frac{2\dot{q}L(Lh_2 + k_m)}{k_m(h_1 + h_2) + 2Lh_1h_2}$$

$$T_2 = -\frac{2L}{k_m}\left[h_1 \cdot (T_\infty - \boldsymbol{T_1}) + \dot{q}L\right] + T_1$$

$$T_2 = -\frac{0.1[m]}{25\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]}\left[30\left[\frac{W}{m^2K}\right] \cdot (15°C - \boldsymbol{T_1}) + 250{,}000\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right] 0.05\ [m]\right] + T_1$$

$$T_2 = -\frac{0.4}{100\ [K^{-1}]}\left[-30\left[\frac{1}{K}\right] \cdot (225.5[°C]) + 12500\right] + 240.5[°C]$$

$$T_2 = -\frac{0.4}{100} 5735[°C] + 240.5\ [°C]$$

$$T_2 = 217.56\ [°C]$$

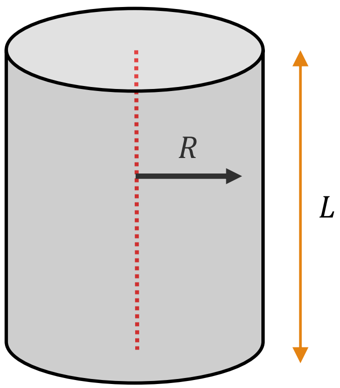
$$\boldsymbol{T_1} = 15[°C] + \frac{250{,}000\ [\mathrm{W/m^3}] 0.1\ [m]\left(0.05[m]90\left[\frac{W}{m^2K}\right] + 25\left[\frac{W}{mK}\right]\right)}{25\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]\left(120\left[\frac{W}{m^2K}\right]\right) + 0.1[m] \times 2700\left[\frac{W}{m^2K}\right]^2}$$

$$\boldsymbol{T_1} = 15[°C] + \frac{25{,}000\ [\mathrm{W}/m^2]\left(29.5\left[\frac{W}{mK}\right]\right)}{25\left[\frac{W}{m \cdot K}\right]\left(120\left[\frac{W}{m^2K}\right]\right) + 270\left[\frac{W^2}{m^3K^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{T_1} = 15[°C] + \frac{25{,}000\ [\mathrm{W}/m^2]\left(29.5\left[\frac{W}{mK}\right]\right)}{\boldsymbol{3270}\left[\frac{W^2}{m^3K^2}\right]}$$

$$\boldsymbol{T_1} = 15[°C] + 225.5\ [K] = 240.5\ °[C]$$

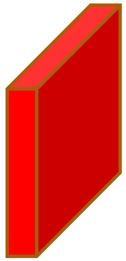
고체 원통에서의 열 발생



원통 내부에서 발생한 열이 반지름 방향으로 온도 T_s인 표면쪽으로 이동한다.

슬라브의 경우 x 방향 단면적 A_x가 x 에 대해 무관하게 일정하다.

$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{A_x} \cdot \frac{d\left(A_x \frac{dT}{dx}\right)}{dx}$$



$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{d\left(\frac{dT}{dx}\right)}{dx} = -\frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{A_r} \cdot \frac{d\left(A_r \frac{dT}{dr}\right)}{dr} \rightarrow \frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{2\pi r \cdot L} \cdot \frac{d\left(2\pi r \cdot L \frac{dT}{dr}\right)}{dr} \rightarrow \frac{\dot{q}}{k_m} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d\left(r \frac{dT}{dr}\right)}{dr}$$

$$\rightarrow -\frac{\dot{q}r}{k_m} = \frac{d\left(r \frac{dT}{dr}\right)}{dr} \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}r^2}{k_m} = r\frac{dT}{dr} + C_1$$

원통 전체가 균일하고 동일한 재료로 이루어져, 원통의 가장 안쪽 (r=0)인 곳이 가장 온도가 높을 것으로 예상.

따라서 at $r = 0$, T is maximum $\rightarrow at\ r = 0, \frac{dT}{dr} = 0$

$$0 = 0 + c_1$$

r을 양변에 나누고 다시 적분

$$-\frac{1}{2}\frac{\dot{q}r}{k_m} = \frac{dT}{dr}$$

$$\int_R^r -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}r}{k_m} dr = \int_{T_s}^T dT$$

At $r = R, T = T_s$

$$T = T_s - \frac{1}{4}\frac{\dot{q}(r^2 - R^2)}{k_m}$$