유체 정역학 Fluid Statics

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부
정영웅

yjeong@changwon.ac.kr
https://youngung.github.io
https://github.com/youngung

유체 정역학 (流體靜力學), Fluid statics

- The study of fluids at rest; 정지 상태의 유체(fluid)에 대한 학문
  - 유체 정지 압력
  - 기압
  - 부력

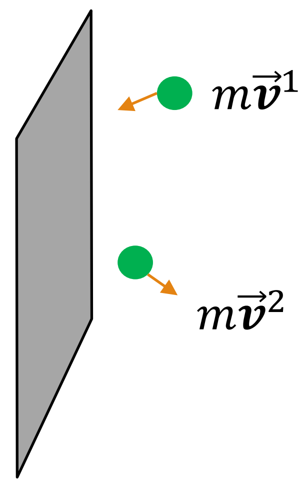
압력의 개념

- 기체를 담고 있는 용기의 벽에 가해진 힘으로 인해 압력 생성
- 압력은 기체 속 원자/분자가 벽과 충돌하여 생긴 운동량의 (시간에 따라 계속하여 발생하는) 변화에 기인
  - 운동량 변화율 $\equiv \frac{\Delta \text{운동량}}{\text{시간}} = \frac{\Delta(\text{질량} \times \text{속도})}{\text{시간}} = \frac{\Delta(\text{mv})}{\text{t}}$
- 단위? – SI system을 사용한다면..
  - 운동량의 단위는 $\text{kg} \cdot \text{m/s}$; 시간의 단위는 second
  - 따라서 운동량 변화율의 단위는 $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
  - 위 단위는 힘의 단위로 알려진 Newton(N)과 같다.
  - <u>즉, 운동량 변화율의 단위는 힘(force)단위와 동일.</u>

기체에 의해 용기의 벽에 가해진 힘은 기체 원자/분자가 용기의 벽과 충돌할 때 생기는 운동량의 변화 때문에 생긴다.

위의 결론은 기체, 액체와 같은 유체(fluid)에 공히 적용된다.

시간에 따른 운동량 변화률: 가상의 면에 작용하는 힘

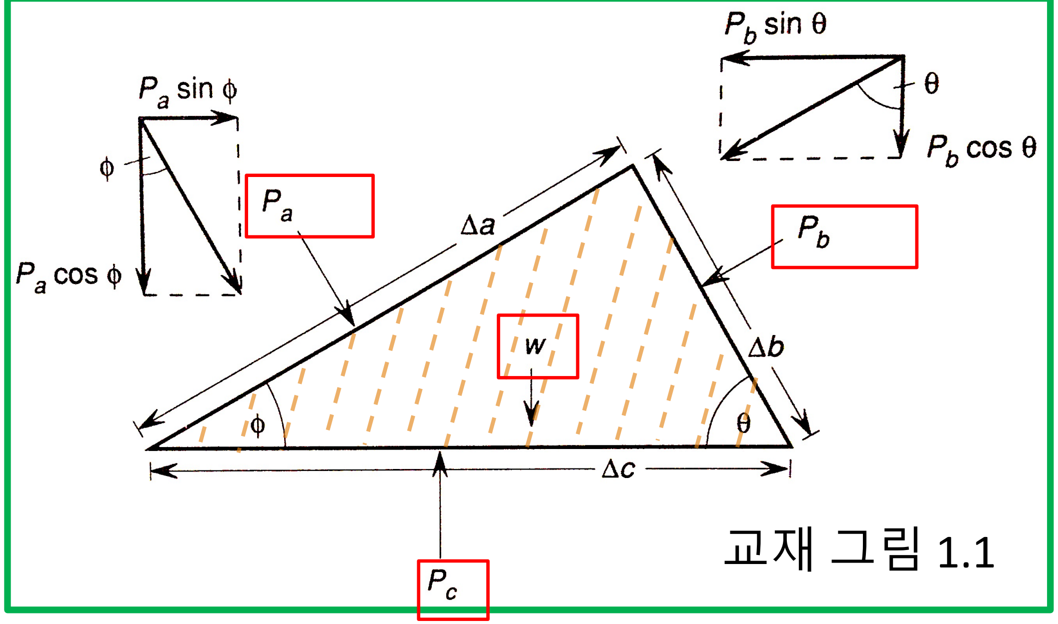


$$\text{Force} = \frac{m\vec{v}^2 - m\vec{v}^1}{t}$$

압력의 개념

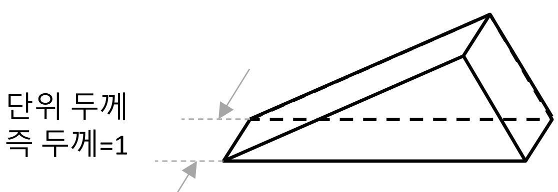
❑정지유체; 정적 (힘)평형 상태

- 정지 유체내의 주어진 한 위치에서의 유체가 가진 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.
  - (주의) 위치에 따라 유체가 가진 압력 값은 달라질 수 있다.
- 위를 아래의 유체 요소 (element)를 사용하여 증명



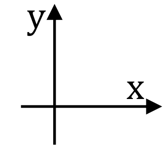
교재 그림 1.1

위 유체(빗금)는 중력장(gravity field)에 영향을 받고 있다



힘평형 상태

한 계(system)에서 vector로 표현된 힘은 '어느 방향'에서든 zero.



유체가 '힘평형' 상태라면 **<u>어느 방향으로든</u>** 힘 평형이 되어야 한다 – 모든 force component들이 각각 zero

$$F_a = P_a \times \Delta a \times 1$$

$$F_a^x = F_a \sin\phi = P_a \cdot \sin\phi \cdot \Delta a$$
$$F_a^y = -F_a \cos\phi = -P_a \cdot \cos\phi \cdot \Delta a$$

$$F_b = P_b \times \Delta b \times 1$$

$$F_b^x = -F_b \sin\theta = -P_b \cdot \sin\theta \cdot \Delta b$$
$$F_b^y = -F_b \cos\theta = -P_b \cdot \cos\theta \cdot \Delta b$$

$$F_c = P_c \times \Delta c \times 1$$

$$F_c^x = 0$$
$$F_c^y = P_c \cdot \Delta c$$

w

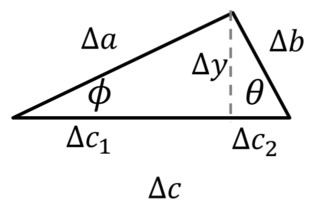
$$w^y = -w$$
$$w^x = 0$$

압력의 개념

$$F^x = \sum_i F_i^x = F_a^x + F_b^x + F_c^x + w^x = 0$$
$$F^y = \sum_i F_i^y = F_a^y + F_b^y + F_c^y + w^y = 0$$

$$F^x = P_a \cdot \sin\phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \sin\theta \cdot \Delta b = 0$$
$$F^y = -P_a \cdot \cos\phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \cos\theta \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

- A few more inputs considering the geometric features!
  - $\sin\theta = \Delta y/\Delta b$
  - $\cos\theta = \Delta c_2/\Delta b$
  - $\sin\phi = \Delta y/\Delta a$
  - $\cos\phi = \Delta c_1/\Delta a$



- Weight (w; body force; 체적력):
  - $w = mg = \rho g V = \frac{1}{2}\rho g \Delta c \Delta y$

$$F^x = P_a \cdot \sin\phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \sin\theta \cdot \Delta b = 0$$
$$\rightarrow P_a \cdot \Delta y/\Delta a \cdot \Delta a - P_b \cdot \Delta y/\Delta b \cdot \Delta b = 0$$
$$\rightarrow P_a - P_b = 0 \therefore P_a = P_b$$

$$F^y = -P_a \cdot \cos\phi \cdot \Delta a - P_b \cdot \cos\theta \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$
$$\rightarrow -P_a \cdot \frac{\Delta c_1}{\Delta a} \cdot \Delta a - P_a \cdot \frac{\Delta c_2}{\Delta b} \cdot \Delta b + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$
$$\rightarrow -P_a \cdot \Delta c_1 - P_a \cdot \Delta c_2 + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$\rightarrow -P_a \cdot \Delta c + P_c \cdot \Delta c - w = 0$$

$$(P_c - P_a)\Delta c - \frac{1}{2}\rho g \Delta c \Delta y = 0$$
$$\rightarrow P_a + \frac{1}{2}\rho g \Delta c \Delta y/\Delta c = P_c$$

압력의 개념

$$P_a = P_b$$

$$P_a + \frac{1}{2}\rho g \Delta y = P_c$$

우리가 사용한 유체 요소가 실제 유체의 '한점'을 모형화 (modeling) 한 것이므로, 무한히 작은 부피(체적)을 대표하여

$$P_a \approx P_c$$

정지 유체내의 어떠한 점의 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.

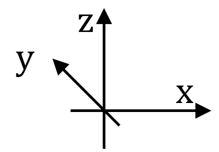
정지 유체내에 유일한 힘은 세면의 수직방향으로 작용하는 힘 (앞에서 F_a, F_b, F_c으로 표기했던 힘 요소) 그리고 중력장에 의한 무게힘 w (**체적력**; body force) 뿐이다.

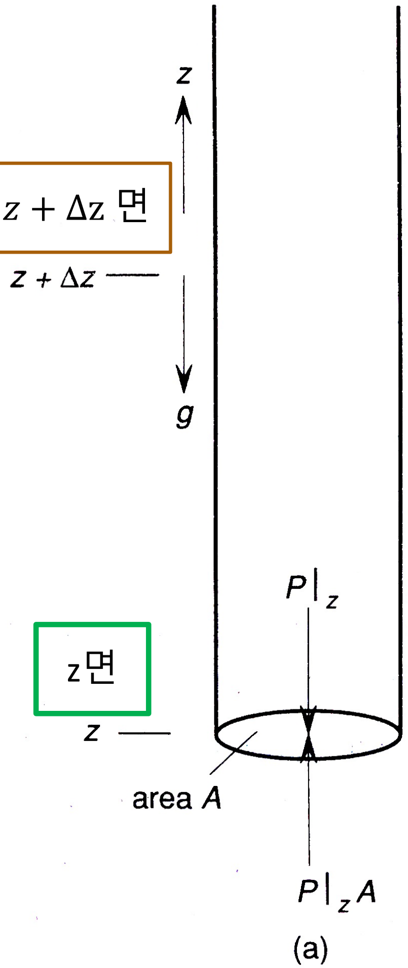
앞서 살펴본 바에 따르면, 유한한 크기를 가진 유체 요소에 작용하는 힘 F_a, F_b, F_c, w를 살펴보았고, 그 중에서 w는 ***위치에 따라 변한다.***

위치에 따라 변하는 w (유체 기둥의 예)

중력장($\vec{g}$)내의 z면 위에 위치한 유체기둥

사용된 좌표계



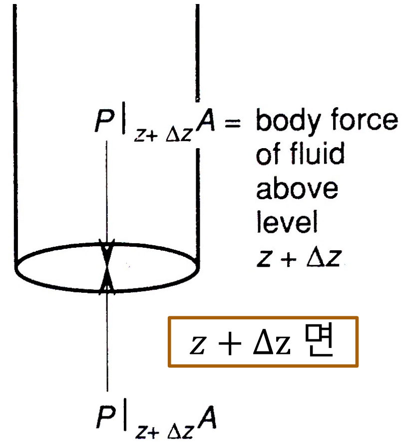


$z + \Delta z$ 면

z면

$P|_z$: 중력장에 의해 z 면에 작용하는 z축 방향 수직 압력

$P|_z \times A$: z위치에서 작용하는 힘

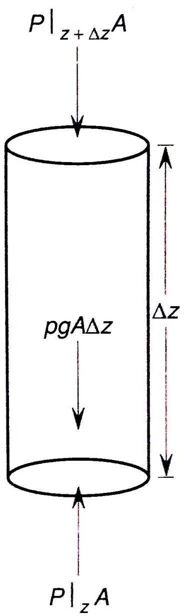


$z + \Delta z$ 면

z면 과 $z + \Delta z$ 면

사이에서 z축 방향으로 수직 압력 차이가 존재한다.

- 수직 압력차이는 수직 '힘' 차이로 이어진다.
- 이런 힘 차이는, 중력장에 놓인 유체가 중력작용 방향으로 '두께차' Δz를 가질 때 생긴다.



Q: Δz 만큼의 두께차이로 인해 달라지는 수직(압)력 차이는 어디에 기인하나?

A: Δz 만큼의 두께 사이에 끼인 유체에 작용하는 중력장의 힘 (즉 무게)

따라서,

$$P\Big|_{z+\Delta z} \cdot A - P\Big|_{z} \cdot A = -\rho \cdot \vec{g} \cdot V = -\rho \cdot \vec{g} \cdot A \cdot \Delta z$$

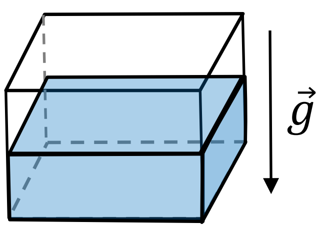
위를 rearrange:

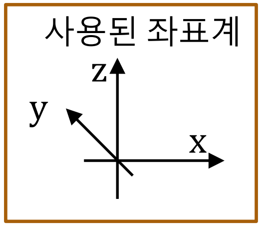
$$\frac{P|_{z+\Delta z} \cdot A - P|_z \cdot A}{\Delta z} = -\rho \cdot \vec{g} \cdot A \rightarrow \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z} = -\rho \cdot \vec{g}$$

$$\frac{dP}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z} = -\rho \cdot \vec{g}$$

Recap, pause, break

- 압력의 origin (분자/원자의 시간당 운동량의 변화; 운동량 변화율)
- 중력장내에 위치한 유체는 중력장에 의해 중력장 방향으로 ‘체적힘’을 받게 된다.
- 유체 기둥 모형을 이용하여 중력장에 의한 체적힘을 유체의 밀도(ρ)와 중력장의 세기 ($\vec{g}$, 즉 중력 가속도)를 사용하여 나타내었더니, 다음의 결론을 얻었다:
  - $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot \vec{g}$
  - 중력장 방향으로 작용하는 유체내의 압력 P는 중력장이 작용하는 방향(앞서 기준이 되는 좌표계의 z축은 g 방향과 반대로 설정했었다.)으로 이동할 수록 점점 커진다.

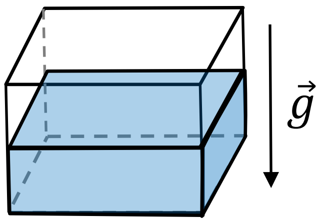


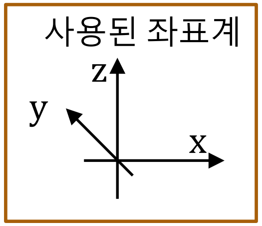


$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g}$$

Example

정지한 유체





$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$

수족관내의 물의 밀도가 1 [g/cm^3] 으로 일정하다 (incompressible). 대기압이 101325 Pascal 일 때 깊이 5 m 에서의 수압을 계산하라.

해석적 해

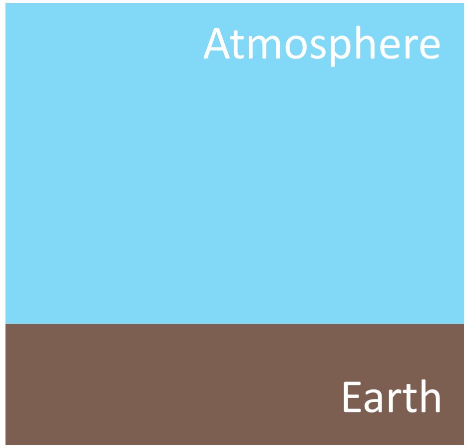
수치적 해

Let's fix $\Delta z = 0.1\ [m]$

수족관내의 물의 밀도가 깊이에 따라 달라진다면?

Application to atmosphere

- 대기 (atmosphere)



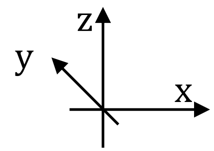
만약 대기가 이상기체 거동을 한다면?

$$PV = \frac{RT}{M}$$

만약 대기가 이상기체 거동을 한다면?

P: pressure
V: 단위 질량당 부피 (= $1/\rho$)
R: 기체 상수
T: 온도 (절대 온도)
M: 기체의 분자량

$$PV = \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{1}{V} = \frac{PM}{RT}$$



$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -g\frac{PM}{RT}$$

$$\frac{dP}{P} = -g\frac{M}{RT}dz$$

이상기체 방정식

- $PV = nRT = Nk_BT$
  - P: Pressure of the gas
  - V: Volume of the gas
  - n: the amount of substance of gas (the number of moles; 몰수)
  - N: The number of gas molecules ($N_A \cdot n$; 아보가드로의 수 × 몰수)
  - k_B: Boltzmann constant
  - T: the absolute temperature of the gas.

- Molar form:
  - 기체의 ‘량’을 정확하게 나타내기 위해서 몰수 대신, 정확한 질량을 사용할 수 있다.
  - 질량(m)은 분자량 (기호 M; 단위 $g{\cdot}mol^{-1}$) 곱하기 몰수(n)로 나타낼 수 있다.
    - $m = M \cdot n$
    - $n = m/M$

- $PV = nRT \rightarrow PV = \frac{m}{M}RT \rightarrow P\left(\frac{V}{m}\right) = \frac{1}{M}RT$
  - 여기서 $\frac{V}{m}$를 단위 질량 m에 해당하는 부피($\bar{V}$)로 나타내면 $P\bar{V} = \frac{1}{M}RT$
  - 그리고 $\frac{1}{\bar{V}} = \frac{m}{V} = \rho$ 로 표현 가능.

Application to atmosphere

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gM}{RT}dz$$

- 온도, g가 z에 무관하다 가정
- At $z = 0$, $P = P_0$
- At $z = z$, $P = P$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_0^z -\frac{gM}{RT}dz$$

$$= -\frac{gM}{RT}\int_0^z dz$$

$$\ln(P/P_0) = -\frac{gM}{RT}z$$

또는

$$\boxed{\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{gM}{RT}z\right)}$$

기압 공식 (barometric formula)

- 온도는 z에 영향을 받는다 *(온도는 높이 올라갈 수록 떨어진다)*

- 예를 들어 1000m 올라 갈 수록 6.5°C 만큼 RT에서 감소 한다면, 다음과 같이온도 T는 z에 대한 함수로 표현가능 하다:

$$T(z) = 298 - \frac{6.5}{1000}z$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gM}{R\left(298 - \frac{6.5}{1000}z\right)}dz$$

Numerical solution?

$$\frac{dP}{P} = -\frac{gM}{R\left(298 - \frac{6.5}{1000}z\right)}dz$$

Boundary condition: at z=0, P=1 [atm]

- z에 따른 P의 변화를 살펴보자 P(z)

Let's fix $\Delta z = 0.01$

Let's fix $z_0 = 0, P_0 = 1$

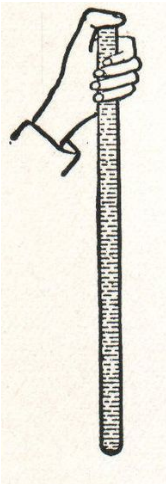
What is $\Delta P = ?$

$$\Delta P = P - \frac{gM}{R\left(298 - \frac{6.5}{1000}z\right)}\Delta z$$

$$= P_0 - \frac{gM}{R\left(298 - \frac{6.5}{1000}z_0\right)}\Delta z$$

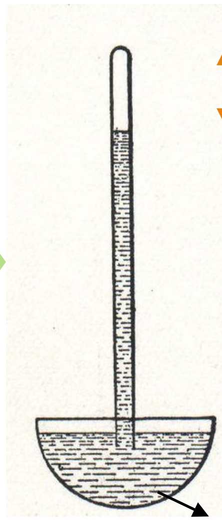
엑셀을 활용한 풀이

Torricelli experiment



수은이 가득찬 실린더

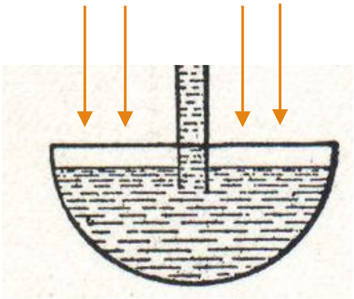
뒤집어



수은조

전체 관에 비해서, 비어있는
관의 길이가 얼마나 긴지 측정

아하! 수은조 내의 대기와의
경계면(≈자유표면)에
작용하는 대기압에 의해
수은이 '정지'해 있군!



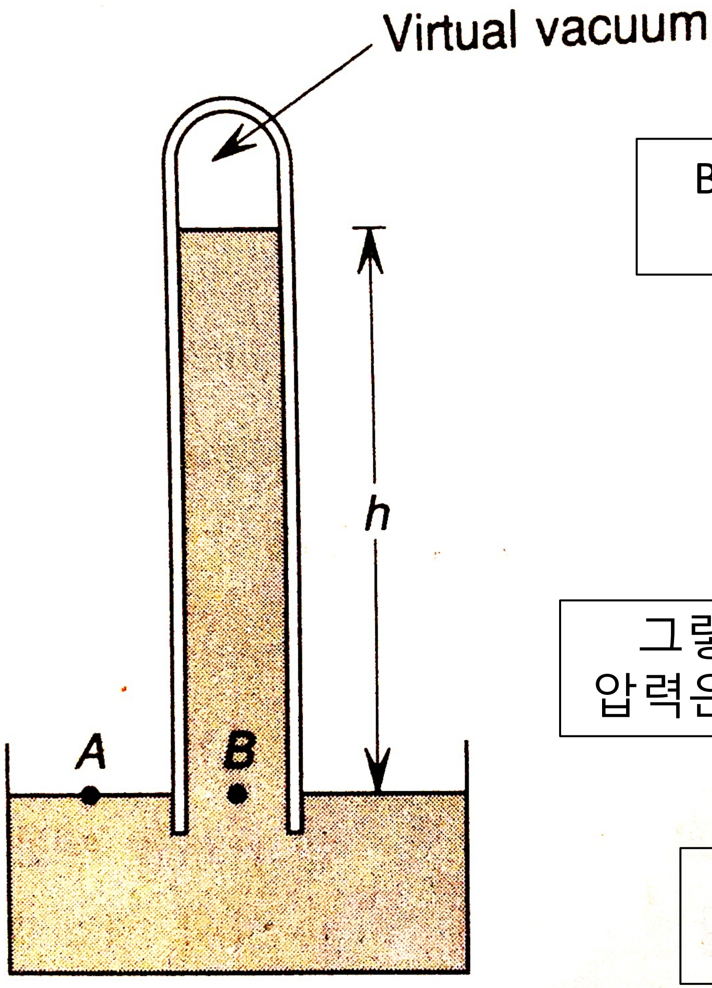
다양한 대기압에서
반복시에 빈 관의
길이가 변한다. 왜?

위 수은은 중력장내에서 '정지'한 유체이다.
수은이 정지해 있는 것으로 보아 **경계표면의 대기압과, 관내의 수은에 작용하는 중력 사이에 힘평형이 있구나**!

자유표면 (free surface): 압력이 작용하지 않는 면; 혹은 압력이 무시해도 될만큼 적거나, 효과적이지 않은 면

https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli

Torricelli experiment



B지점에서의 유체 압력 = 대기와의 경계표면 A에 작용하는 대기압

따라서, B지점의 압력을 구하여 대기압을 측정할 수 있다!!

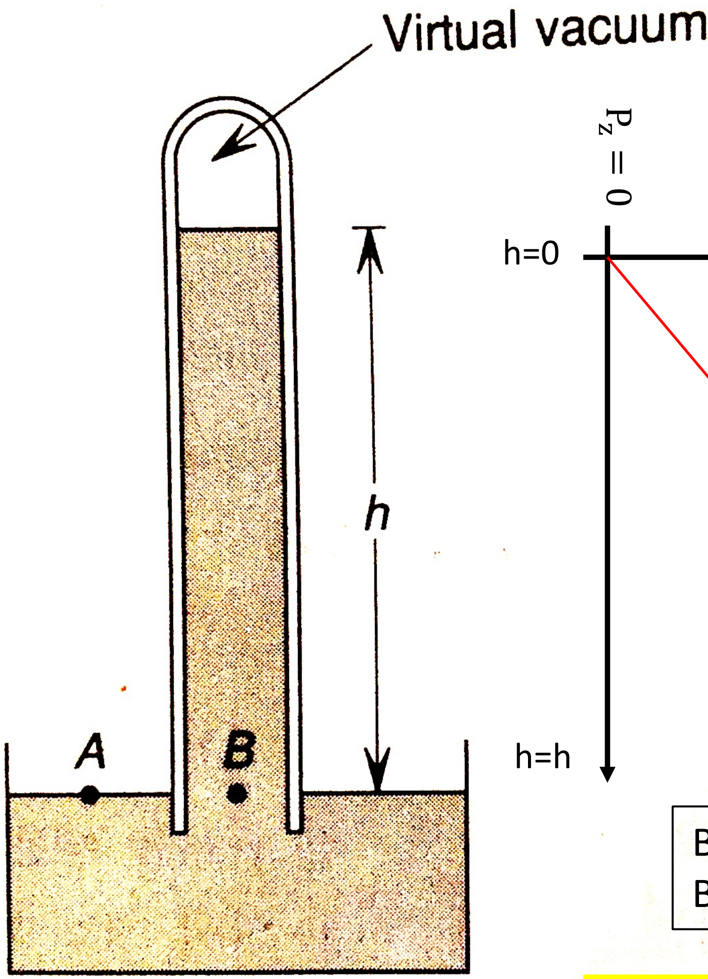
그렇다면, B지점의 압력은 어떻게 구하나?

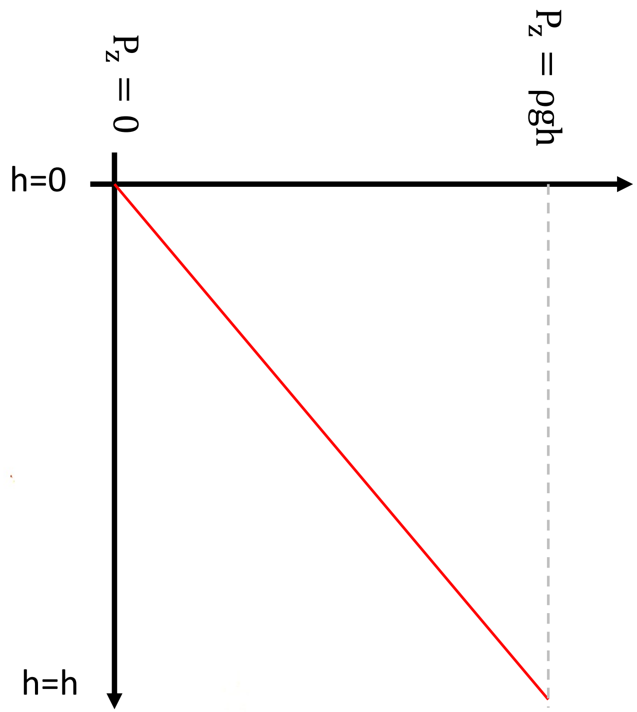
바로, B지점위로 실린더 내에 존재하는 수은기둥에 작용하는 중력 (무게)과 관련.

수은이 비압축성(incompressible) 액체라면 높이(압력)에 상관없이 밀도가 일정

B지점에서의 작용힘 $= \mathrm{mg} = \rho \cdot \mathrm{area} \cdot \mathrm{height} \cdot \mathrm{g}$

Torricelli experiment





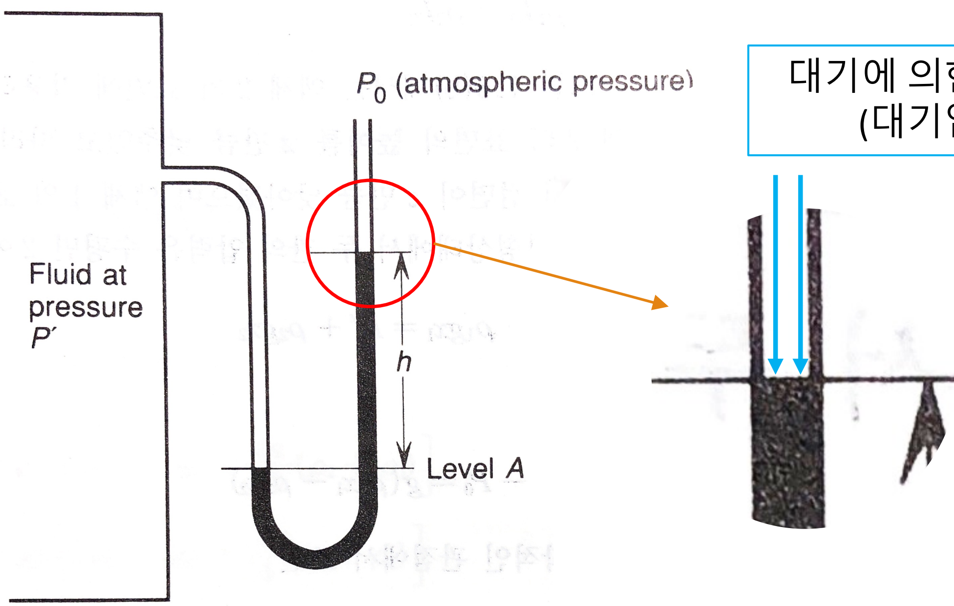
h 높이의 관내 ‘자유표면’ 에서의 압력=0

B지점에서의 z 방향 작용힘$(F_z) = mg = \rho \cdot \text{area} \cdot \text{height} \cdot g$
B지점에서의 z 방향 압력: $P_z = F_z/\text{area}$

수은의 밀도, 그리고 중력가속도를 안다면, 수은주 기둥의 높이로 대기압 측정 할 수 있다!

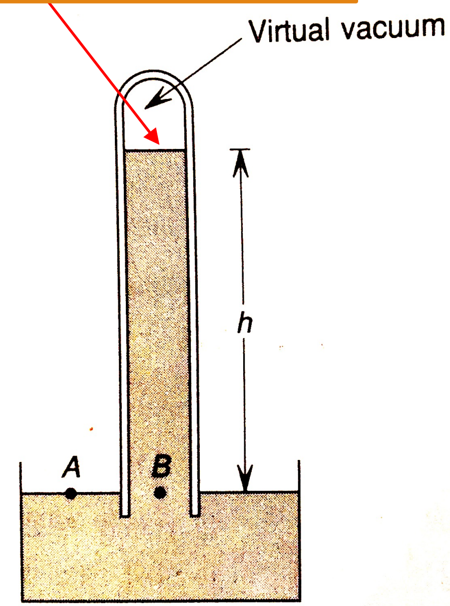
게이지 압력, 절대 압력

❑타이어의 압력을 측정하는 압력계는, 타이어 내부의 공기압을 측정하는 것이 아니라, 타이어 내부의 공기압과 측정하고 있는 환경에서의 대기압사이의 차이를 측정하는 것이다.



대기에 의한 압력
(대기압)

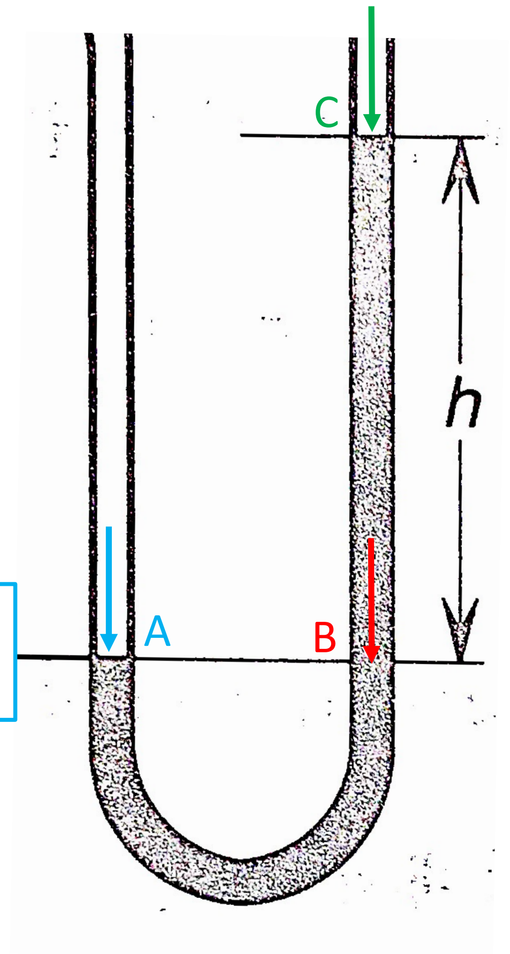
진공아래; 표면에 작용하는
압력 없음 (free surface)



게이지 압력, 절대 압력

중력장 (g)
작용 방향

P_0: 대기압



P_1:
타이어 내부

A, B 위치에서 같은 단면적을 가지므로, 두 지점사이의 힘평형 조건은 압력평형 조건으로 생각할 수 있다 (F=PxA)

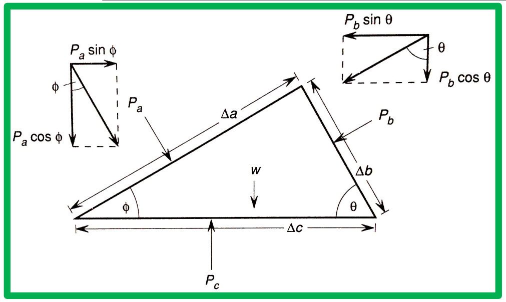
B지점이 받는 압력 = h 높이만큼의 수은이 주는 체적력/단면적 + C에서의 대기압 P_0

$$\boxed{P_1 = \rho g h + P_0}$$

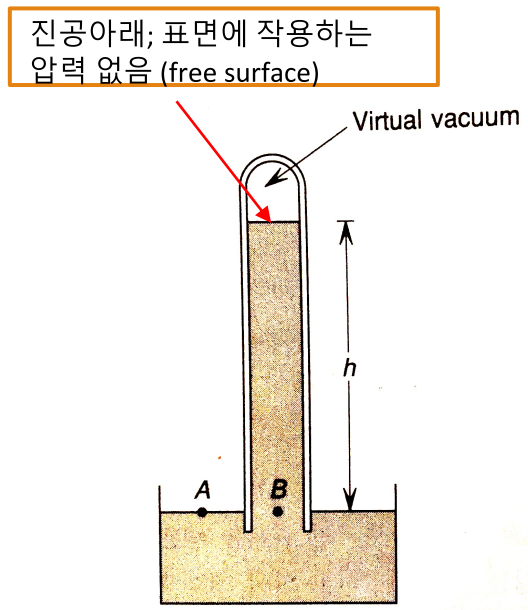
사실, 압력계는 $\rho g h$를 통해 $P_1 - P_0$ 값을 측정하며, 이는 대기압과의 '상대적' 압력 크기 차이이다. 이를 '게이지(gauge) 압력' 이라 한다.

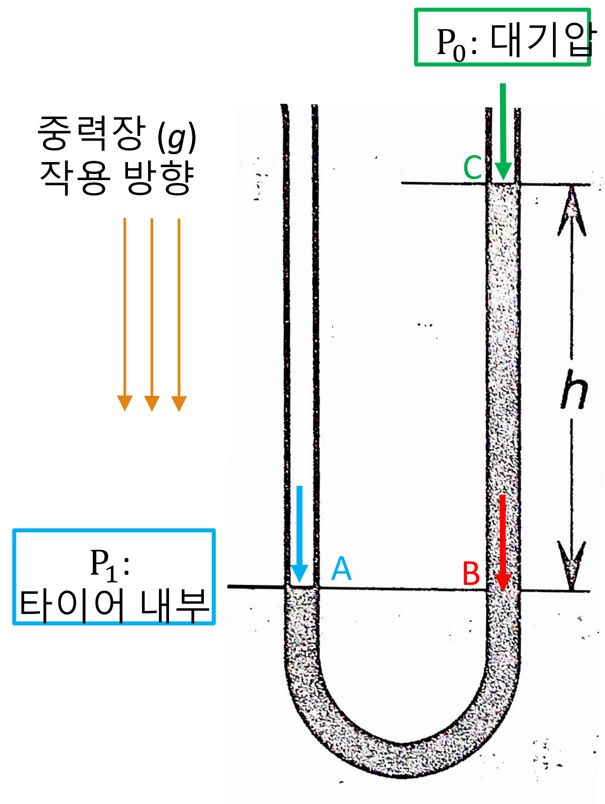
타이어의 절대 압력값은 P_1으로 gauge 압력에 대기압을 더해서 구할 수 있다.

Recap



정지 유체내의 어떤 임의의 점에서도 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.

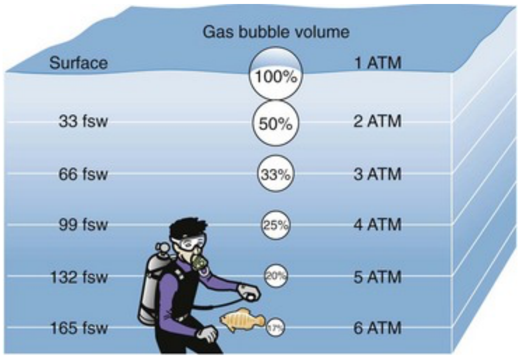


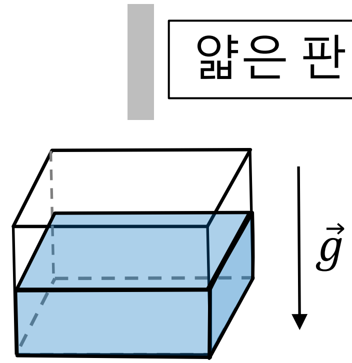


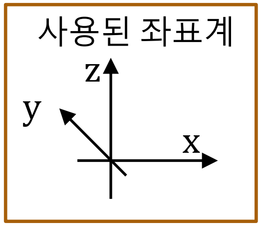
Reading assignment: 두가지 섞이지 않은 액체로 된 압력계 p16-p17

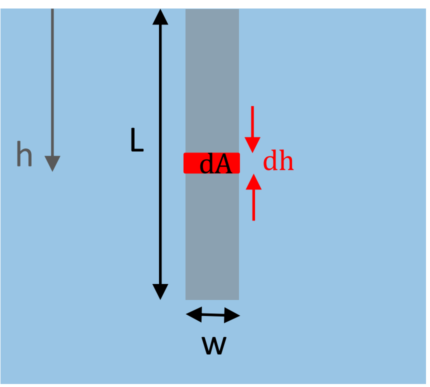
수압

❑다이버(diver)들이 느끼는 수심에 따른 압력 변화?





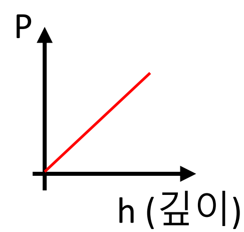




At free surface: $P_z = 0$

At h, what is P_z? ($P_z = \rho g h$)

At h, What is P_x? What is P_y?



y 방향으로 판에 작용하는 힘 (F_y)?

$$\boxed{dF_y = P \cdot dA}$$

$$F_{total} = \int dF_y = \int_A P \cdot dA$$

$$= \int_A PdA = \int_{h=0}^{h=L} P(h)wdh$$

$$= \int_{h=0}^{h=L} \rho \cdot g \cdot h \cdot w \cdot dh$$

$$= \rho g w \int_{h=0}^{h=L} h\, dh = \frac{\rho g w L^2}{2}$$

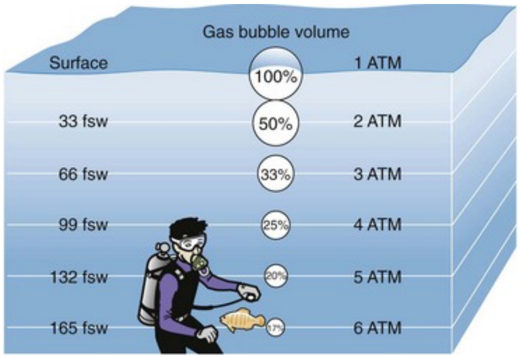
박판 전체에 가해지는 '평균 압력'은?

전체 힘/전체판의 너비$= \frac{\rho g w L^2}{2} / (wL) = \boxed{\frac{\rho g L}{2}}$ → 박판의 길이 반쯤에서 작용하는 수압과 같다

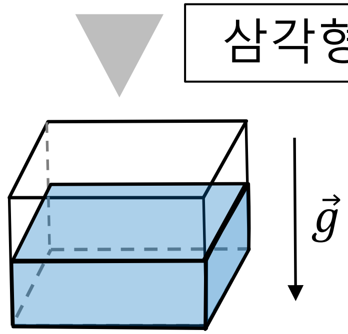
https://clinicalgate.com/scuba-diving-and-dysbarism/

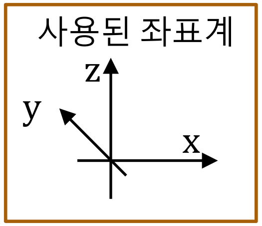
수압

❑ 다이버(diver)들이 느끼는 수심에 따른 압력 변화?



삼각형 판?





삼각형 판 전체에 가해지는 '평균 압력'

$$P_{av} = \frac{\rho g L}{3}$$

풀이 과정은 교재 참고

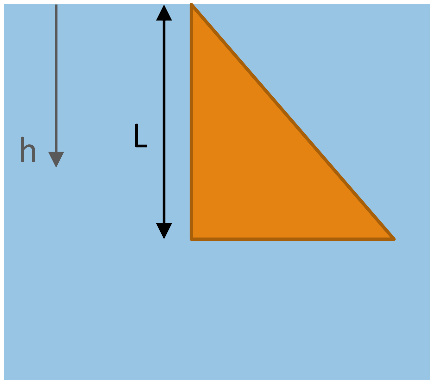
박판 전체에 가해지는 '평균 압력'은?

$$P_{av} = \frac{\rho g L}{2}$$

아하! 수평판에 작용하는 평균 압력은 판의 무게 중심(centroid)에 작용하는 (국소) 압력값과 같구나!

Another example

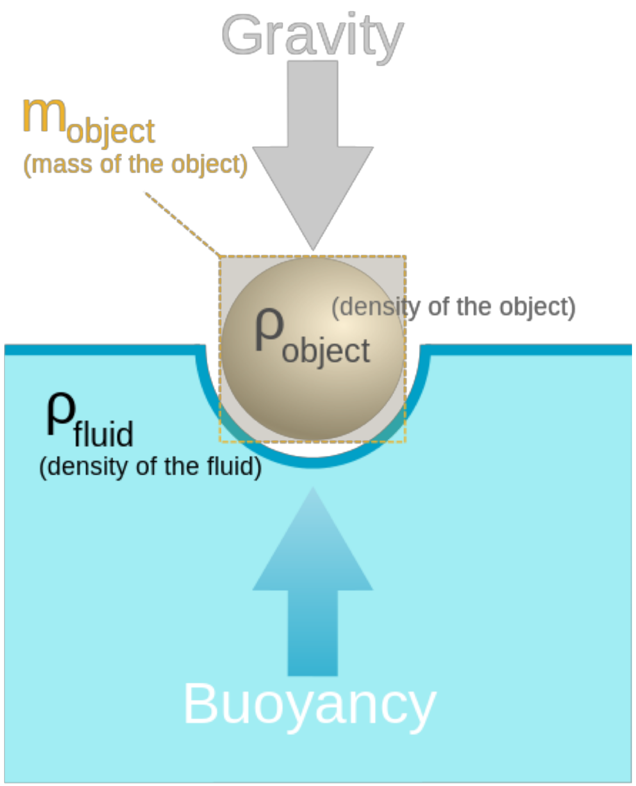
$$F_{total} = \int dF_y = \int_A P \cdot dA$$



부력 (浮力; buoyancy)

Any object, wholly or partially immersed in a fluid, is buoyed up by a force equal to the weight of the fluid displaced by the object

Archimedes' principle

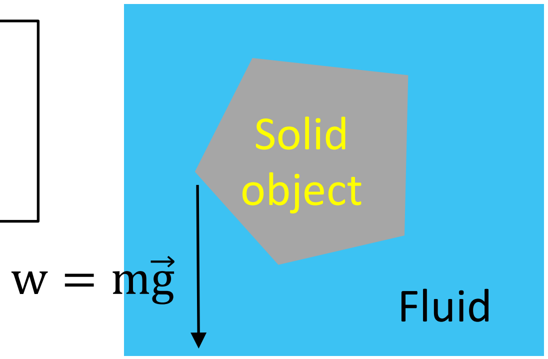


액체 상태의 수은 위에 British pound coin이 부력에 의해 떠있다.

https://en.wikipedia.org/wiki/Buoyancy

Archimedes principle

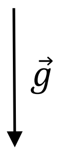
관찰: 물속에서는 무거운 물건을 들어올리는게 더 쉽다.
왜?



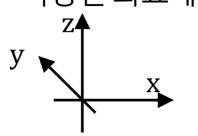
Solid는 중력장의 영향으로 아래로 가라 앉으려는 힘이 작용

물체가 가볍다는 느껴진다는 것은, 무게에 반대 방향으로 떠올리려는 부력 작용하기 때문이다!

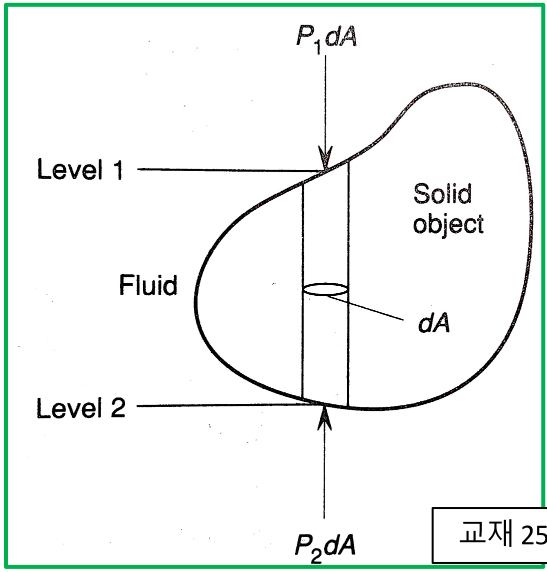
그렇다면 그 부력은 얼마만큼(정량적으로) 작용하는 건가?



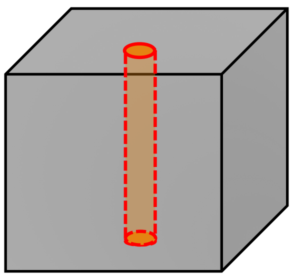
사용된 좌표계



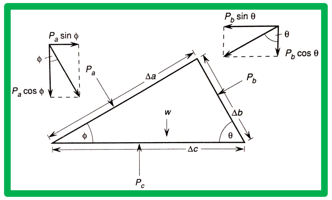
아래의 원통형 체적 요소에서 fluid와 닿는 면은 위 아래 깊이 levels 1, 2밖에 없다.



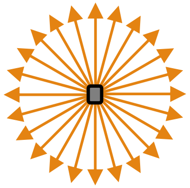
교재 25p, 그림 1.11



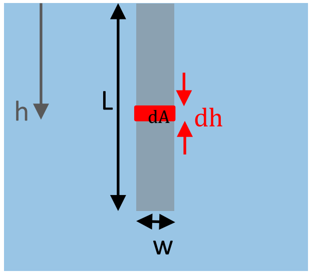
*Slide 4



정지 유체내의 한 임의의 점에서 압력은 모든 방향으로 같은 값을 가진다.



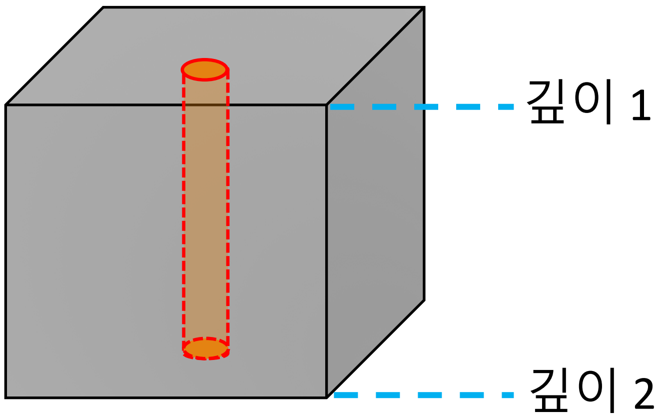
*Slide 17



$$F_{total} = \int dF_y = \int_A P \cdot dA$$

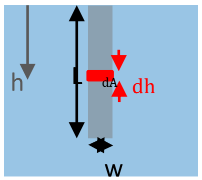
부력

유체에 잠긴 상자의 기둥 체적
요소에 작용하는 부력 구하기



$$\mathrm{dF_z} = \mathrm{P_z dA}$$

*Slide 17



$$\mathrm{F_{total}} = \int \mathrm{dF_y} = \int_A \mathrm{P \cdot dA}$$

체적 속의 기둥에 실제로
위(z방향)으로 유압에 의해 작용하는
힘은 위아래 두 면 뿐이다.

기둥 요소에 전체에 작용하는 유앞에
의한 '떠오르는 방향의 힘 요소':

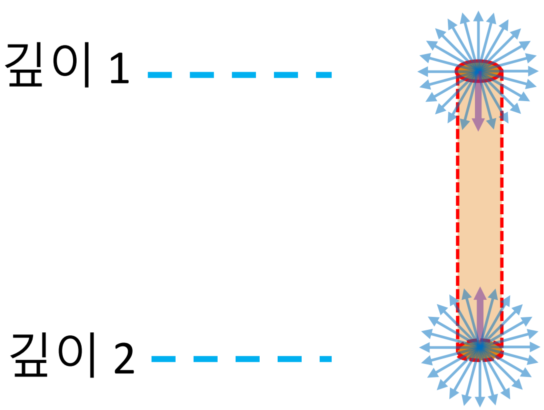
$$\mathrm{dF_z} = P_z(\text{at level 1}) \cdot dA + P_z(\text{at level 2}) \cdot dA$$

$$= (-P_1 dA) + (P_2 dA)$$

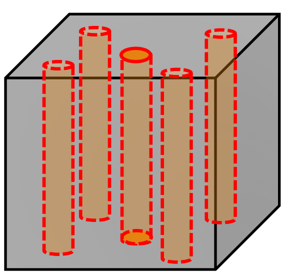
$$= -\rho g h_1 dA + \rho g h_2 dA$$

$$= \rho g (h_2 - h_1) dA$$

$$= \rho g dV$$



$$\mathrm{F} = \mathrm{dF_z^{(1)}} + \mathrm{dF_z^{(4)}} + \mathrm{dF_z^{(3)}} \ldots$$



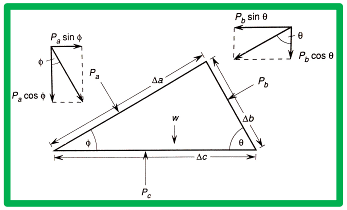
$$\mathrm{F_z} = \int_V \mathrm{dF_z} = \int_v \rho g dV = \rho g V$$

이동현상, 정영웅@창원대 신소재 공학부

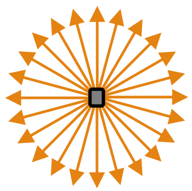
Recap

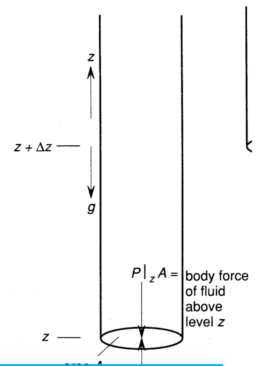
기체에 의해 용기의 벽에 가해진 힘은 기체 원자/분자가 용기의 벽과 충돌할 때 생기는 운동량의 변화 때문에 생긴다.

*Slide 4



정지 유체내의 어떤
임의의 점에서도
<u>압력은 모든 방향으로
같은 값</u>을 가진다.





$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$

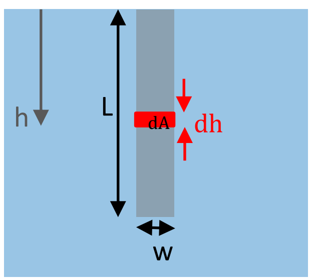
$$\ln(P/P_0) = -\frac{gM}{RT} z$$

또는

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{gM}{RT} z\right)$$

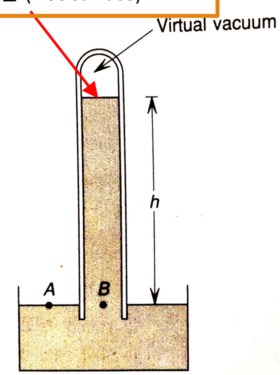
기압 공식 (barometric formula)

*Slide 17



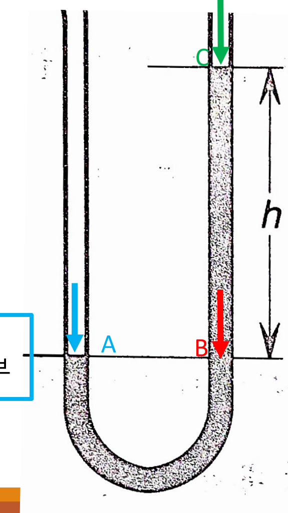
$$P = \rho g h$$

진공아래; 표면에 작용하는
압력 없음 (free surface)



중력장 (g)
작용
방향

P_0: 대기압



P_1:
타이어 내부

$$F_z = \int_V dF_z = \int_v \rho g dV = \rho g V$$

연습 문제 풀이

- 예제 1.1
- 사각형 금속 물탱크는 수면에서 아래로 1m 지점에 유리창 가지고 있다.
- 이때, 1000 kg/m^3 밀도의 물이 창에 작용하는 힘은?
- $P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h$
- $F = \int_A P\, dA$