미분 방정식과 수치해석 접근

이동현상이론 (MSA0013)

창원대학교 신소재공학부
정영웅

yjeong@changwon.ac.kr
https://youngung.github.io
https://github.com/youngung

공학도와 정량화

- 정성적, 정량적
- 정량화(quantification)란?
- 왜 공학도는 정량화를 좋아하나?
- 얼마나 정확한 정량화를 해야하나?
- 그렇다면, 왜 수학이 공학에서 중요한 역할을 할까?
  - 물리적 현상을 수학적 모형으로 표현
  - 복잡한 형상, 조건을 수학적 모형으로 통해서 재현
  - 수학 모형을 사용해 물리현상, 물리량의 정량적인 값을 예측
- 왜 예측이 필요하나?

Mathematical Prerequisites

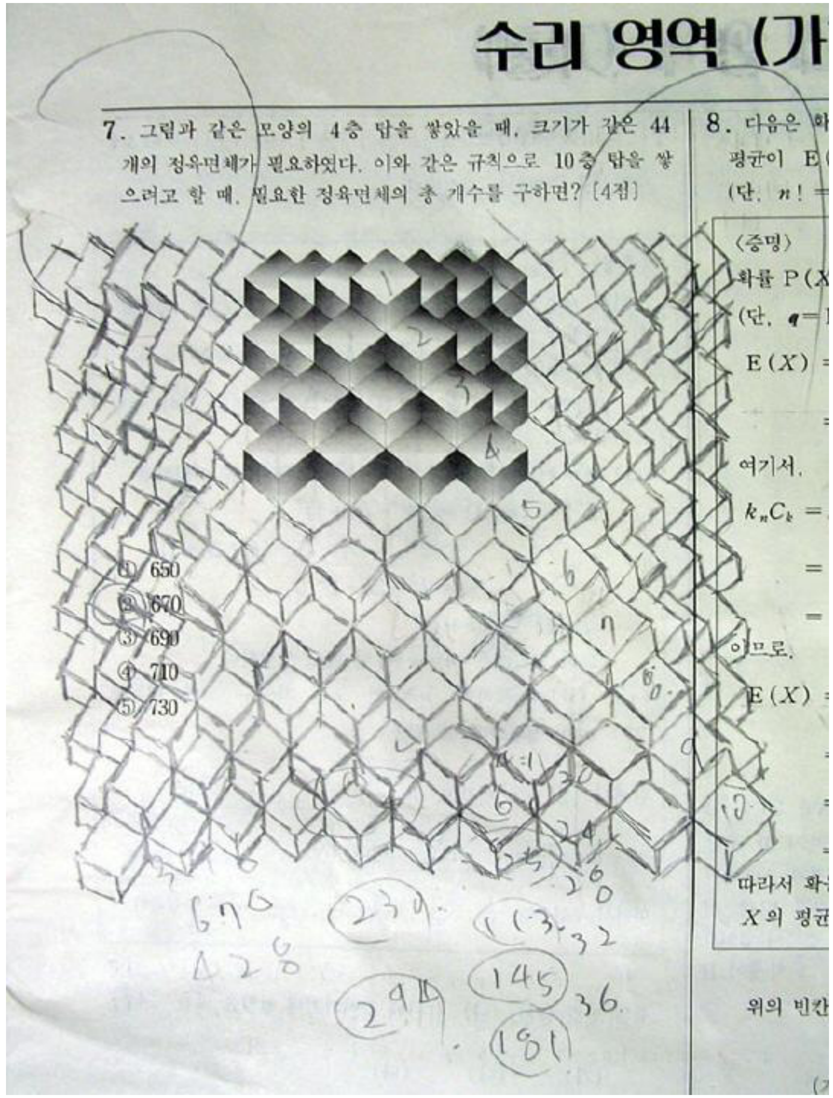
- Some Mathematical prerequisites
  - Differential equations (미분 방정식)
  - Scalars (scalar is a special case of tensor;)
  - Vectors (and possibly tensors; actually vector is a special case of tensor)
  - Coordinate systems (Rectangular, Cylindrical, Spherical)
  - Gradient of a scalar field (or a vector/tensor field)
- Field variable
  - A field is a physical quantity represented by a number (vector/tensor), that has a (set of) value(s) for each point in space and time.

왜 미분 방정식을 배우나?

앞으로 우리가 다룰 물리 법칙들이 미분 방정식의 형태로 표현된다. 따라서 이를 적절히 활용하기 위해서는 미분 방정식에 친숙해지며 그 해를 얻는데 익숙해져야 한다.

아마도 간단한 미분 방정식의 경우에는 다루어 본적이 있겠지만, 이를 '물리현상'에 적용하여 다루어 본 경험이 부족한 학생들이 많을 것으로 예상된다. 따라서 쉬운 예제부터 차근차근 배워보자.

Engineering approach



Differential Equation (미분방정식)

- What is differential equation (미분방정식)?
  - 미지의(unknown) 함수와 그 함수의 도함수(derivative)로 이루어진 방정식

$\dfrac{dy}{dx} = x$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 x	$y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + C$
$\dfrac{dy}{dx} = y$	Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y	$y(x) = Ce^x$
$yy' + x = 0$	Some complex differential equation	implicit $y(x)^a + x^a = C$

$$** \; y' = \frac{dy}{dx}$$

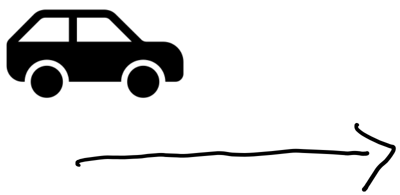
https://youtu.be/HKvP2ESjJbA

ODE and PDE

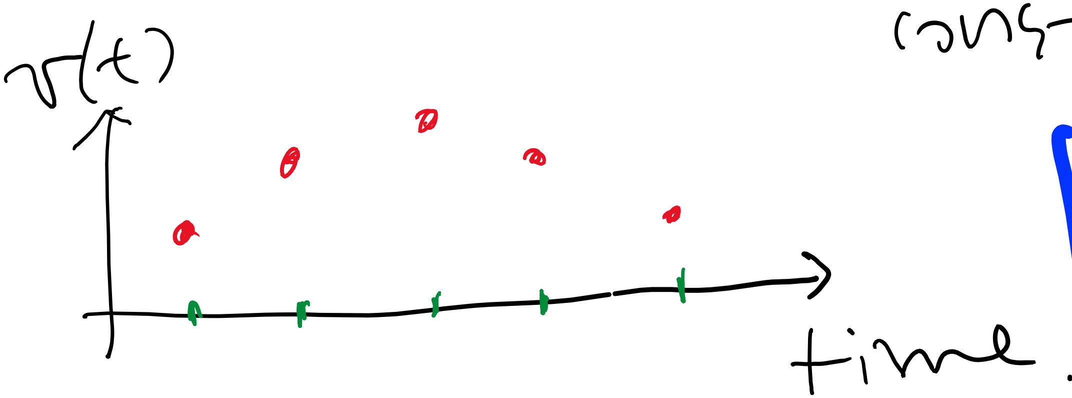
- Ordinary Differential Equation (상미분 방정식)
  - $\frac{du}{dx} = kx$
- Partial Differential Equation (편미분 방정식)
  - $u(x, t) = F(x)e^t$
  - ~~Wave equation~~
  - Laplace (1780s)
    - Mechanical equilibrium
    - Thermal equilibrium
  - Heat equation (Fourier 1800s)
  - Transport equation

- ODE example
  - $\frac{dx}{dt} = x$
- What's the general solution of the above?
  - $x(t) = ce^t$ c: arbitrary constant
- PDE example:
  - $\frac{\partial u}{\partial t} = u$ (u depends on x and t)
- What's the general solution of the above?
  - $u(x, t) = F(x)e^t$ ($F(x)$: arbitrary function)

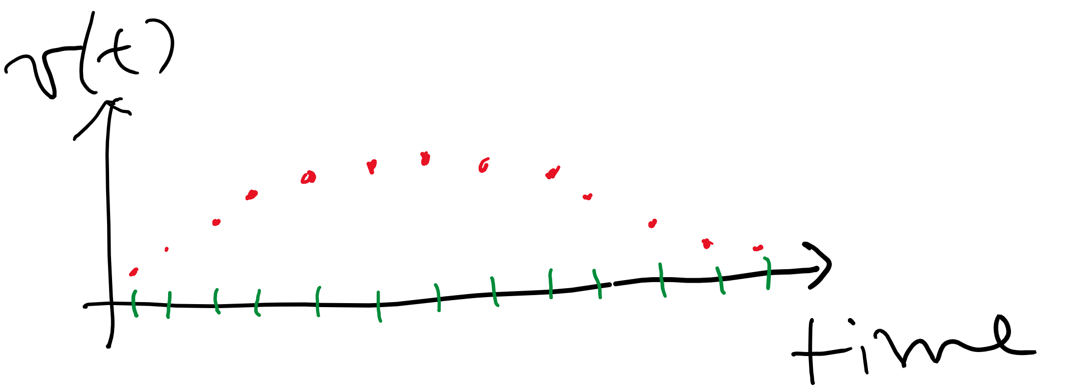
Example: 자동차 속도와 이동 거리



record the speed at a constant frequency



Q distance?



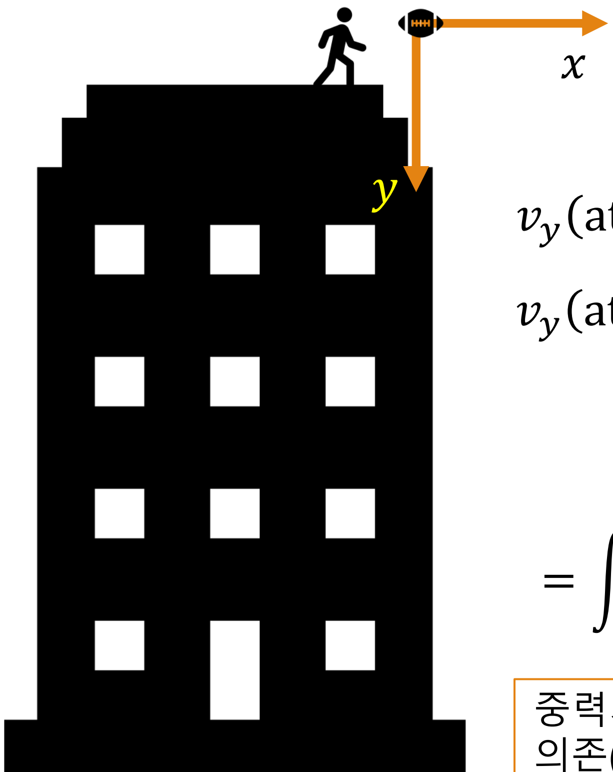
여러분이 스피드 카메라로 아는 것은 $\frac{dx}{dt}$ $(velocity)$. 만약 $\frac{dx}{dt}$ 가 cos function이라면 총 이동 거리는?

Application of differential equation? (Ex1)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 속도 $\vec{v} = (v_x, v_y)$는?
(해당시간동안 지상에 도달못한다고 가정)

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$v_y(\text{at } t = 0) = 0$$

$$v_y(\text{at } t = T) = v_y(\text{at } t = 0) + \Delta v_y = 0 + \int_0^T dv_y = \int_0^T \frac{dv_y}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는
동안 변화한 y방향 속도 변화량

$$= \int_0^T g\, dt = g \int_0^T dt = gT$$

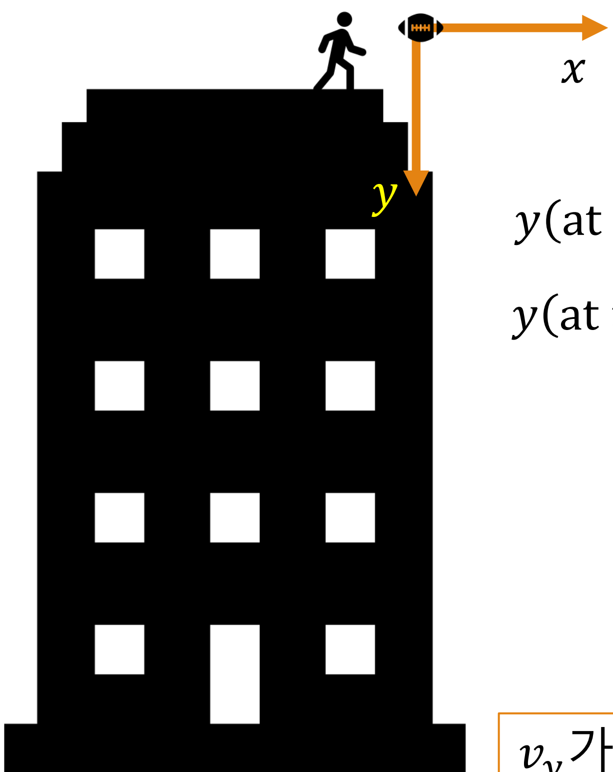
중력가속도 g가 시간에
의존(dependent)하는가?

Application of differential equation? (Ex2-1)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

y가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$y(\text{at } t=0) = 0$$

$$y(\text{at } t=T) \quad = y(\text{at } t=0) + \Delta y \quad = 0 + \int_0^T dy \quad = \int_0^T \frac{dy}{dt} dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 y방향 위치

$$= \int_0^T v_y dt \quad = \int_0^T v_y(t) dt \quad = \int_0^T gt\, dt = \frac{1}{2} gT^2$$

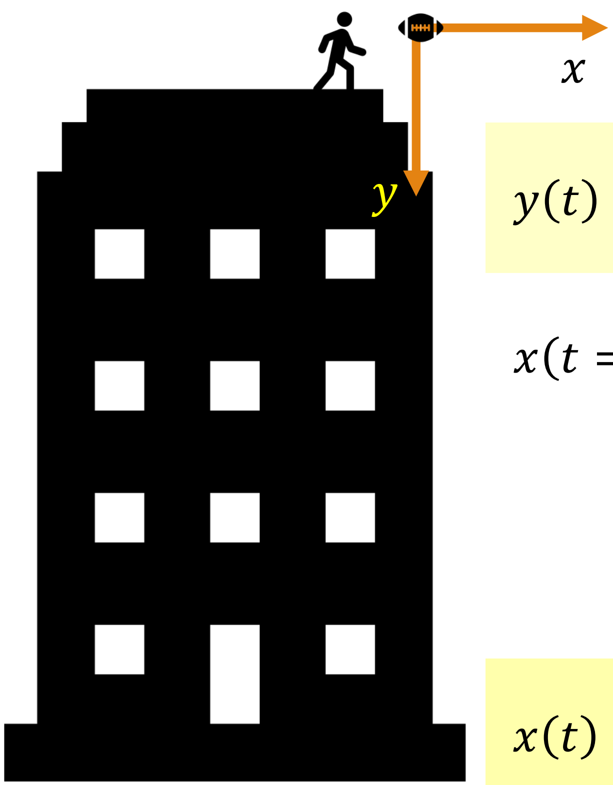
v_y가 시간에 의존(dependent)하는가?

Application of differential equation? (Ex2-2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 공의 위치는?

몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \quad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\,dt = \frac{1}{2}gT^2$$

x가 시간에 의존(dependent)하는가?

$$x(t=T) = x(t=0) + \Delta x = x(t=0) + \int_0^T dx = 0 + \int_0^T v_x dt$$

시간이 t=0 에서 t=T로 흐르는 동안 변화한 x방향 위치

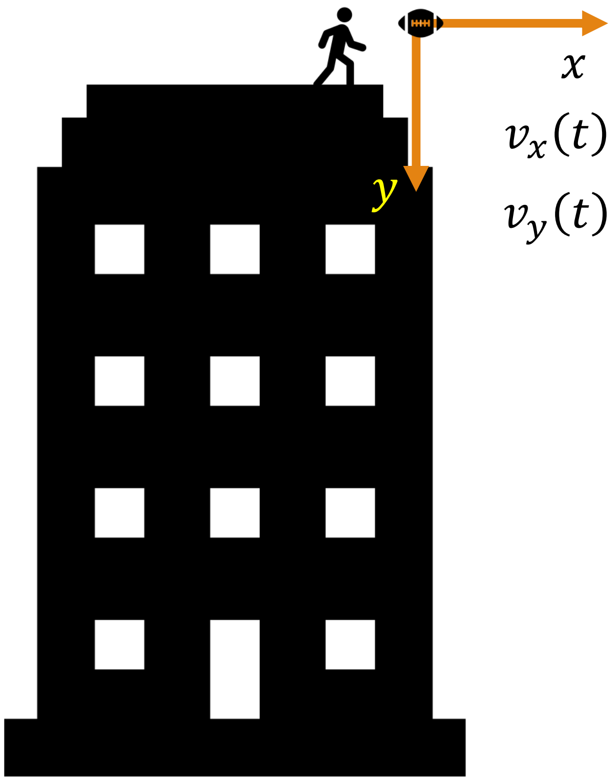
v_x가 시간에 따라 변하는가?

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$

Analytic solution of (Ex1)

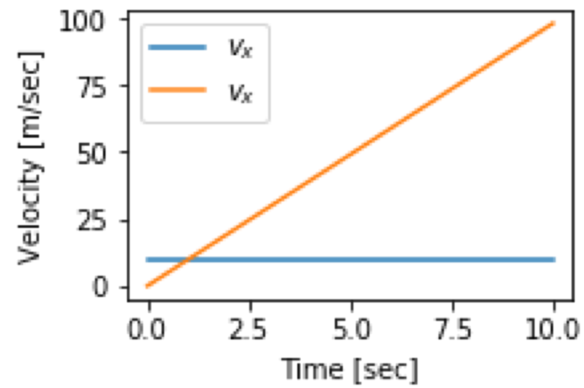
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 속도 $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, v_y)$는?
(해당시간동안 지상에 도달못한다고 가정)



$$v_x(t) = 10\ [m/s]$$

$$v_y(t) = gt$$

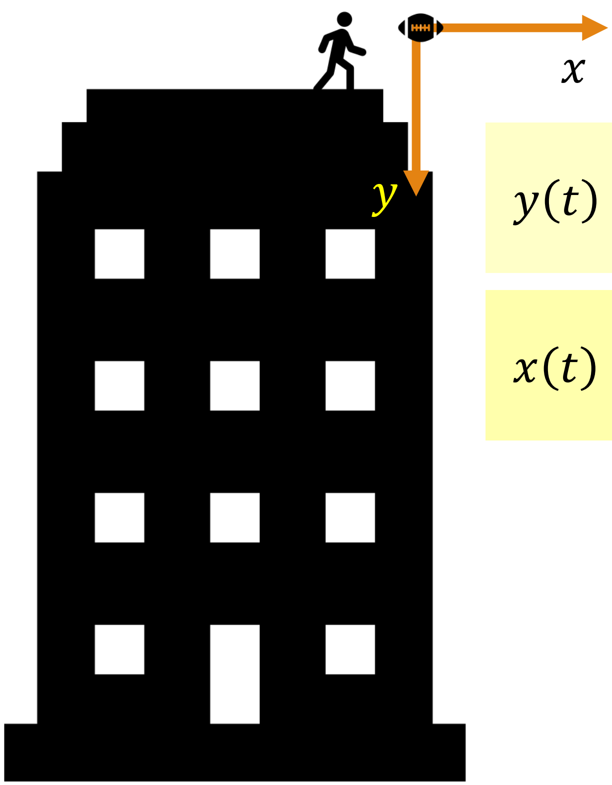


Analytic solution of (Ex2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 T가 지난 후 🏈의 공의 위치는?

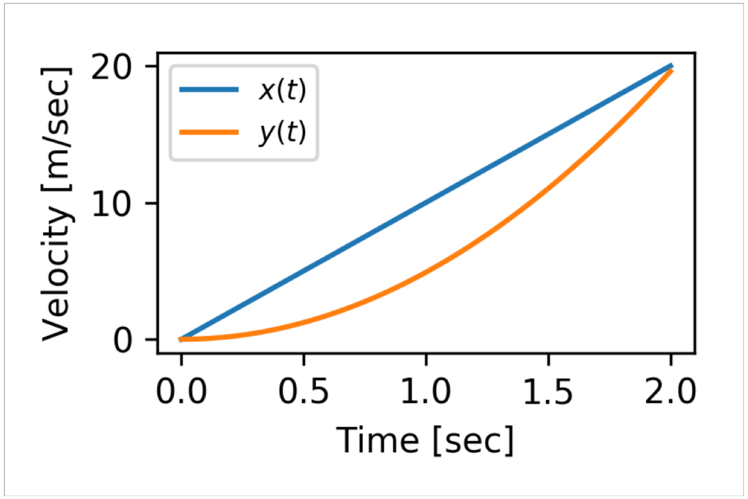
몇몇 (그럴법한) 가정들:
- 공의 움직임에 대한 대기의 저항 무시
- 중력가속도는 일정하게 작용
- 공의 초기 높이는 건물의 높이와 동일하게 적용



$$v_x = \frac{dX}{dt} \qquad v_y = \frac{dY}{dt}$$

$$y(t) = \int_0^T gt\,dt = \frac{1}{2}gT^2$$

$$x(t) = v_x \int_0^T dt = v_x T$$



Numerical method to solve ODE (Euler method)

- There are many of them. My examples in what follows are limited to Forward Euler method applied for integration.

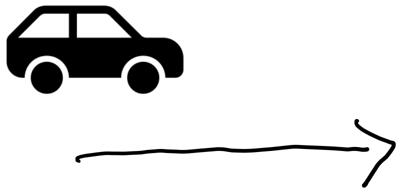
- Euler method (오일러 방법); 미분방정식을 푸는 간단한 방법.

- 다음과 같은 미분 방정식이 주어졌을 때, 함수 y를 임의의 시간t에 대해 알 수 있나?
  - $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$
  - 시간의 흐름을 균일하게 Δt 의 사이즈로 나누어 생각해보면, i번째 시간 단계 (time step)에서의 시간은 그 전 단계(0)과 다음과 같은 관계로 나타낼 수 있다.
    - $t_i = t_0 + i\Delta t$ 로 시간을 나누면?
  - 위의 미분 방정식을 다음과 같이 근사하며 표현할 수 있는데...
    - $\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = f(t_i, y_i)$
    - $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n)$

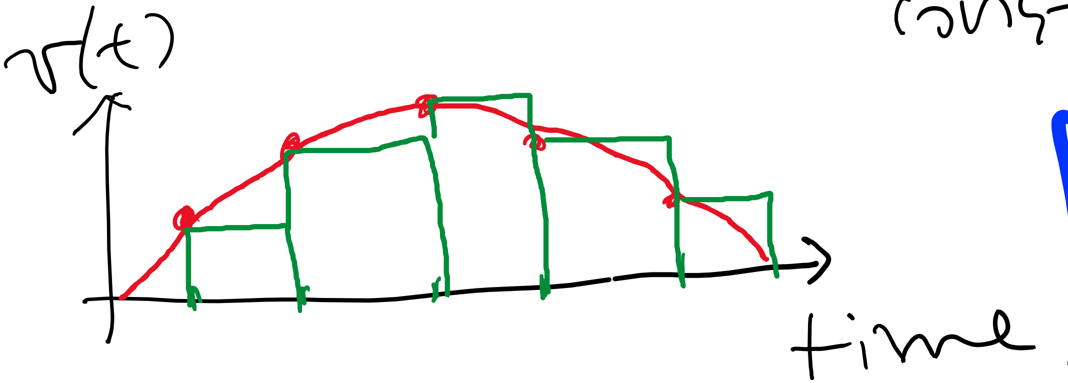
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

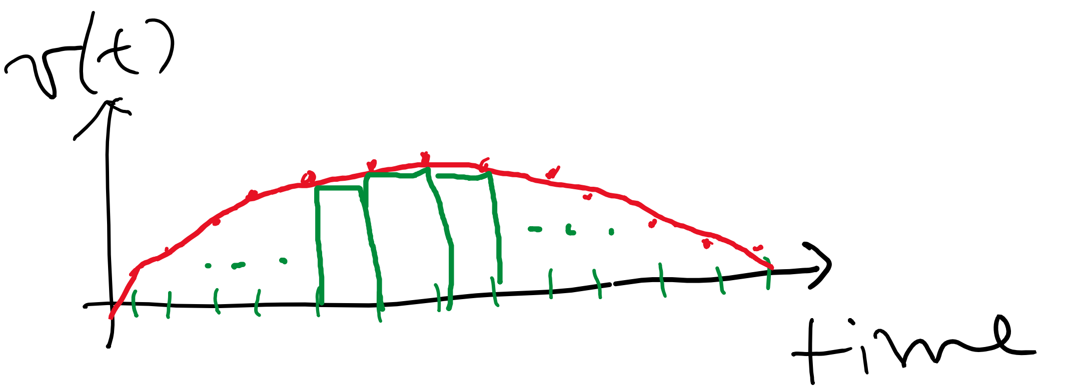
https://ko.wikipedia.org/wiki/오일러_방법

Example: 자동차 속도와 이동 거리



record the speed at a constant frequency



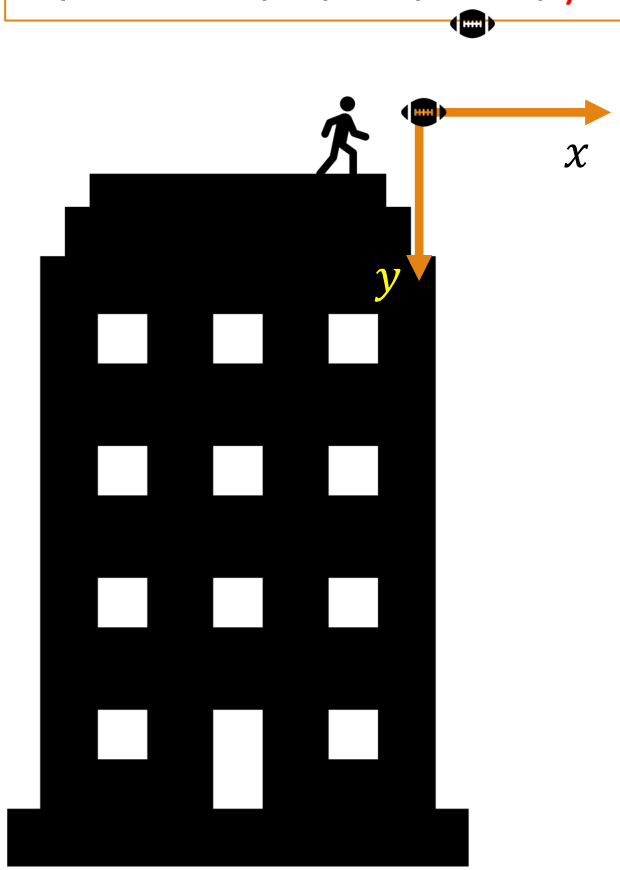


Q distance?

여러분이 스피드 카메라로 아는 것은 $\frac{dx}{dt}$ $(velocity)$. 만약 $\frac{dx}{dt}$ 가 cos function이라면 총 이동 거리는?

Numerical solution? (Ex2)

높이 H의 건물 옥상에서 수평(x방향)으로 어떠한 10 [m/s]속도로 공을 던졌을 때, 임의의 시간 10초가 지난 후 공의 y 위치는?



$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

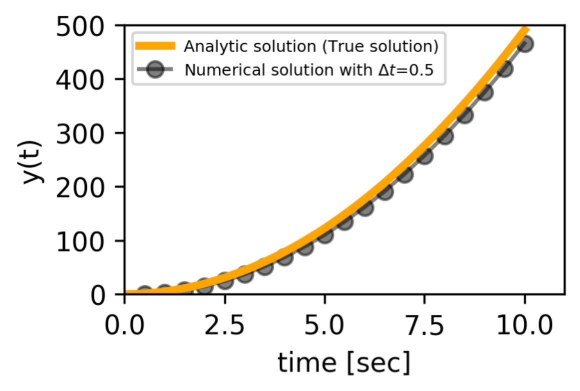
$$dy = v_y(t) \cdot dt$$

$$\Delta y = v_y(t) \cdot \Delta t$$

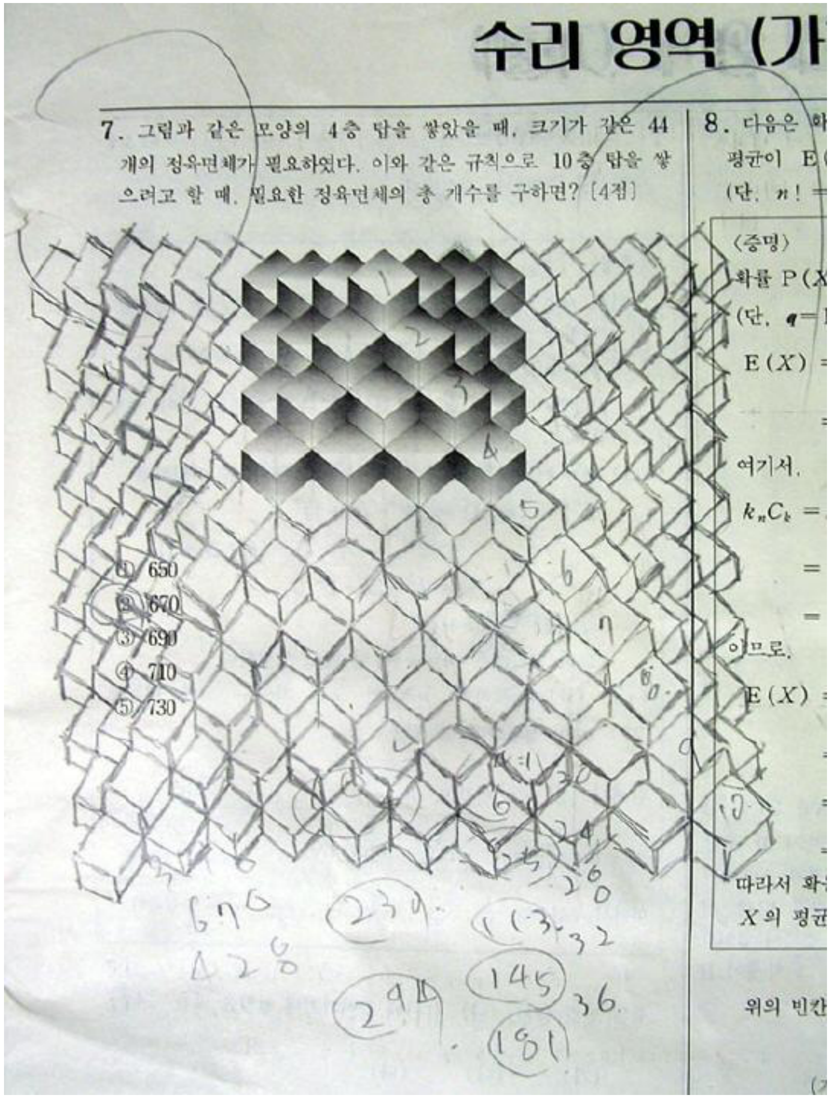
Let's say $\Delta t = 1$ and $t_0 = 0$

$$y_{n+1} = y_n + v_y(t_n)\Delta t = y_n + g t_n \Delta t$$

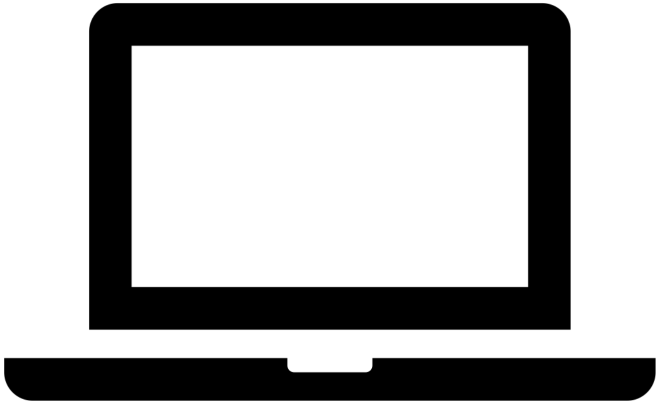
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$



~~Engineering~~ Numerical approach + Computer



+

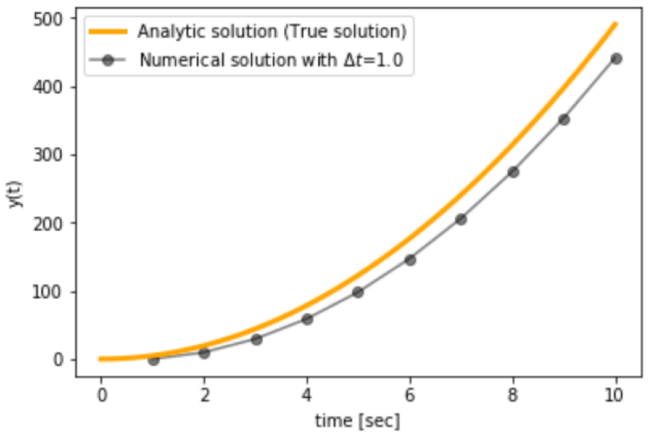


Simple programming using Python

```
t=0.
y_nu=0.
dt=1
ts=[]
ys=[]
while (t<10):
    y_nu=y_nu+9.8*dt*t
    #plot(t,y_nu,'ok')
    t=t+dt
    ts.append(t)
    ys.append(y_nu)

t=np.linspace(0,10)
ax=gca()
ax.plot(t,y(t),label='Analytic solution (True solution)',c='orange',lw=3)
ax.plot(ts,ys,'k-o',label=r'Numerical solution with $\Delta t$=%2.1f'%dt,alpha=0.5,zorder=-1)
ax.set_xlabel(r'time [sec]')
ax.set_ylabel(r'y(t)')
ax.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x10cbdfad0>
```



여기서 사용된 프로그램은 iPython notebook이라고 불리는 open source 패키지 입니다. 궁금한 학생은 google에서 찾아보세요.

Advanced example

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y

$y(x) = Ce^x$

$y(x)$ 함수의 해석적 해

초기 조건: $y(x=0) = 1$ 인 조건이 주어진다면…

$y(x) = e^x$

수치적 접근

초기 조건: $y(x=0) = 1$

Q: x가 4일 때 y는? 즉, y(4)?

Let's solve it with Δx = 1

(assuming Δx = 1 is sufficiently small)

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y = y_n + y_n \Delta x$$

Δx는 0.1로 가정했다. 그렇다면 Δy는?

Δy = yΔx

$y_{n+1} = y_n + y_n \times \Delta x$

$y_{n+1} = y_n (1 + \Delta x)$

$x_0 = 0$ 일 때 $y_0 = 1$

$x_1 = x_0 + \Delta x = 1$ $\quad y_1 = 1 \times 2 = 2$

$x_2 = 2$ $\quad y_2 = 2 \times 2 = 4$

$x_3 = 3$ $\quad y_3 = 4 \times 2 = 8$

$x_4 = 4$ $\quad y_4 = 8 \times 2 = 16$

Advanced example

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Unknown function $y(x)$ 의 derivative가 y

$$\boxed{y(x) = Ce^x}$$

$y(x)$ 함수의 해석적 해

초기 조건: $y(x=0)=1$ 인 조건이 주어진다면…

$y(x) = e^x$

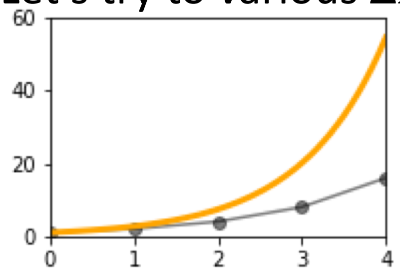
수치적 접근

초기 조건: $y(x=0)=1$

Q: x가 4일 때 y는? 즉, y(4)?

54.65277549135438

Let's try to various Δx values



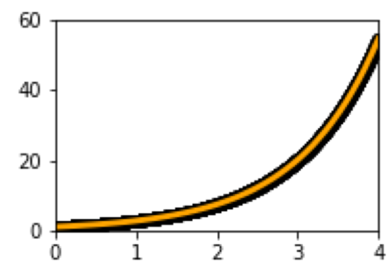
n	x	y
0	0.00	1.00
1	1.00	2.00
2	2.00	4.00
3	3.00	8.00
4	4.00	16.00

n	x	y
0	0.00	1.00
1	0.50	1.50
2	1.00	2.25
3	1.50	3.38
4	2.00	5.06
5	2.50	7.59
6	3.00	11.39
7	3.50	17.09
8	4.00	25.63

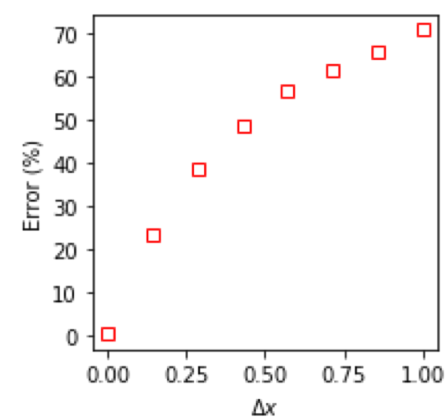
n	x	y
0	0.00	1.00
1	0.01	1.01
2	0.02	1.02
3	0.03	1.03
4	0.04	1.04
5	0.05	1.05

…

395	3.95	50.93
396	3.96	51.44
397	3.97	51.95
398	3.98	52.47
399	3.99	52.99
400	4.00	53.52



3993	3.993	54.109
3994	3.994	54.163
3995	3.995	54.218
3996	3.996	54.272
3997	3.997	54.326
3998	3.998	54.380
3999	3.999	54.435
4000	4.000	54.489



Transport Equation

- A particular differential equation that is often applied to transport of a scalar field.
  - Scalar field being..
    - Momentum
    - Temperature
    - Chemical concentration

- It is applied to incompressible flow (not allowing density change)

$$\frac{du}{dt} + c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

1차원

u: unknown field variable.
Thus, $u = u(x, y, z, t)$

$$\frac{du}{dt} + c\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

3차원

In physics, a **field** is a physical quantity, represented by a number or tensor, that has a value for each point in space-time.

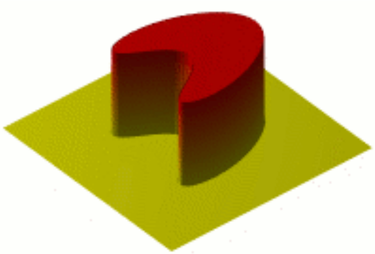
Heat equation

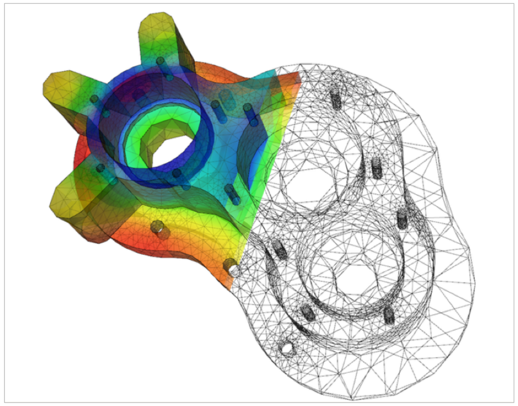
$$\frac{dT}{dt} - \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0$$

Solution to the above is temperature distribution and its changes (evolution) with respect to time (t).

$$T(x, y, z, t)$$

(Lecture 4, 열전달에서 더욱 상세하게 다룰 예정)





Example (Assignment)

- 재료의 변형을 설명하는데 있어 가장 기초적으로 쓰이는 물리량은 변형률(strain)이다. 특히 진변형률 (true strain) ε 은 다음과 같이 물질의 길이 l 에 의한 미분 방정식의 형태로 정의 된다:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

- 앞서 배운 Euler method를 사용해서, 길이 l이 10 mm 에서 16 mm 로 변할 때 이에 해당하는 진변형률 ε을 다음의 조건에서 구하여라.

  - 초기의 진변형률 (즉 길이 l이 10 [mm] 일때의 ε값)은 0이다.

  - Δl을 3 mm, 2 mm, 1 mm로 변함에 따라 달라지는 ε값에 대해 살펴보아라.

  - 위 미분 방정식의 해석적 해를 구하고, Euler method를 통해 얻은 값을 비교해 보아라.