# 예제)

Ex1) 다음 벡터의 length (magnitude)를 구하시오.

$$\boldsymbol{a} = (1,2,5)$$

Ex2) 다음 벡터의 unit vector를 구하시오.

$$\boldsymbol{b} = (1,1,2)$$

Ex3) 다음 벡터의 unit vector를 구하시오.

$$\boldsymbol{b} = (0, \cos\theta\,, -\sin\theta)$$

# 연산 (mathematical operations)

- 여러분들이 숫자에서 해보았던 연산?
  - 더하기 (빼기). $+$, $-$
  - 곱하기 (나누기). $\times$, $\div$
  - 지수곱, $a^c$
- Operations for vectors, tensors, matrices?
  - Scalar product
  - Dot product (내적, inner dot product) $\cdot$
  - Addition (벡터 합/차) $+$, $-$
  - Cross product $\times$
  - Double dot product $:$
  - Dyadic product $\otimes$

# 벡터 연산 (vector operations)

- Vector addition: 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 의 합은 다음과 같이 표현된다:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

or

$$c_i = a_i + b_i \text{ with } i = 1,2,3 \quad (*)$$

- 벡터 합을 **bold-face**기호를 사용하여 표기하거나,
- 인덱스 표기법 (indicial notation)에 따라 나타낼 수 있다.

(*)FYI, 자유 인덱스 $i$가 1,2,3 임이 명백하므로, 앞으로는 생략하여 표기

# 벡터 Scalar 곱, 벡터 성분 분해

- Vector multiplication with scalars

$$c\boldsymbol{a} = c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

- 한 벡터는 (주어진 좌표계에 참고하여) 좌표계의 basis 벡터에 나란한 세 벡터의 합으로 나눌 수 있다:

$$\boldsymbol{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

Some people use $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *(*)* to denote the basis vectors such that

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

*(*) bold-face의* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 와 밑첨자 인덱스 $i, j, k$를 혼동하지 말 것.

# 예제)

Ex1) 다음 두 벡터 합을 구하시오.

$$\boldsymbol{a} = (1,2,5) \quad \boldsymbol{b} = (2,-2,0)$$

Ex2) 다음 두 벡터의 합에 해당하는 벡터의 unit vector를 구하시오.

$$\boldsymbol{a} = (-1,3,0) \quad \boldsymbol{b} = (2,-2,1)$$

Ex3) $\boldsymbol{a} = (-1,2,3) \quad \boldsymbol{b} = (2,-2,-2)$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) + (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$$

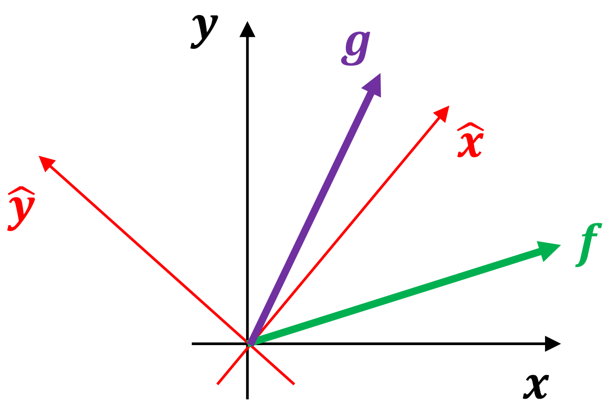
Ex4) $\boldsymbol{a} = (-1,2,2) \quad \boldsymbol{b} = (2,-2,-2)$

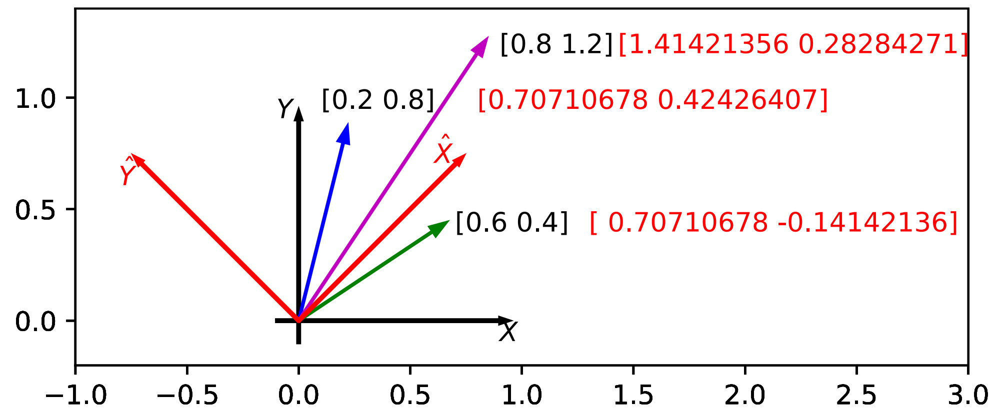
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) + (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$$

# Vector operations and coordinates

- 벡터의 구성성분은 임의로 설정된 좌표계에 의해 특정된다. 합하는 두 벡터에 사용하는 좌표계가 다르다면, 같은 물리량 (예를 들어 힘; force)을 표현하는 벡터라도 다른 좌표 값을 가진다.
- 힘 벡터의 합을 구성성분의 합으로 표현하기 위해서는 **<u>반드시</u>** 두 벡터의 구성성분이 <u>같은 좌표계에</u> 표현되어 있어야 한다.

각각 특정 물리량을 표현하는 $\boldsymbol{g}$와 $\boldsymbol{f}$의 합은 어떠한 좌표계를 사용하던 그 '물리적' 결과가 동일해야 한다.

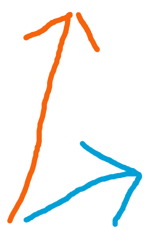



- 합 뿐만 아니라 다른 벡터 operations들을 행하기에 앞서 반드시 구성성분이 같은 좌표계로 표현되어 있어야 한다.
- Operation 결과가 vector (혹은 tensor) quantity 일 때, 구성성분들은 선택된 좌표계에 참조된다.

# The inner dot product

두 벡터 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$의 내적(inner dot product)의 기하학적 표현



$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

$\cos\theta$ is an even function, so that

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos(-\theta) \ = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{x}| \cos(\theta)$$

$$= \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$|\boldsymbol{x}| \equiv x = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2}$$

FYI, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)

$$\delta_{ij} = 1 \ (if \ i = j); \delta_{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

***Algebraic*** representation of scalar product of two vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_i x_i\mathbf{e}_i$$

$$\boldsymbol{y} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_i y_i\mathbf{e}_\mathrm{i}$$

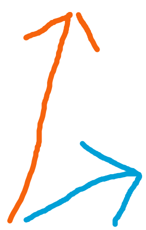
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_i x_i\mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\sum_i y_j\mathbf{e}_j\right)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i$$

# The inner dot product

두 벡터 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$의 내적(inner dot product)의 기하학적 표현



$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

$\cos\theta$ is an even function, so that

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos(-\theta) \ = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{x}| \cos(\theta)$$
$$= \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$$

$$|\boldsymbol{x}| \equiv x = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2}$$

FYI, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)

$$\delta_{ij} = 1\ (if\ i = j); \delta_{ij} = 0\ (i \neq j)$$

***Algebraic*** representation of scalar product of two vectors $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_i x_i\mathbf{e}_i$$

$$\boldsymbol{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_3 = \sum_i y_i\mathbf{e}_i$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_i x_i\mathbf{e}_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j\mathbf{e}_j\right)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i$$

# Indicial notation; 인덱스(index)를 활용한 표기법

기호$_i$ : ’기호’로 나타낸 벡터의 성분을 밑첨자 (subscript) $_i$를 사용해 나타낸다.
(예: $a_i$는 벡터 $a$의 성분을 뜻한다.)

- 3차원에서 index는 $i = 1,2,3$ 존재.
- $a_i$ 는 $\boldsymbol{a}$벡터의 3 성분, $\mathbf{e}_i$는 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 세 벡터를 뜻함 (Q: 차이?)
- $\sigma_{i1}$는 $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$ 세 성분을 뜻함 (자유 index 가 하나: $i$)
- $c_{ij}$는 $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$ 총 9개의 ‘값’을 뜻함 (자유 index 두개 $i, j$)
- $a_i b_j$는 $a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3, a_3b_1, a_3b_2$ , $a_3b_3$ 총 9개의 ‘값’을 뜻함 (자유 index 두개 $i, j$)
- $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$ (???)

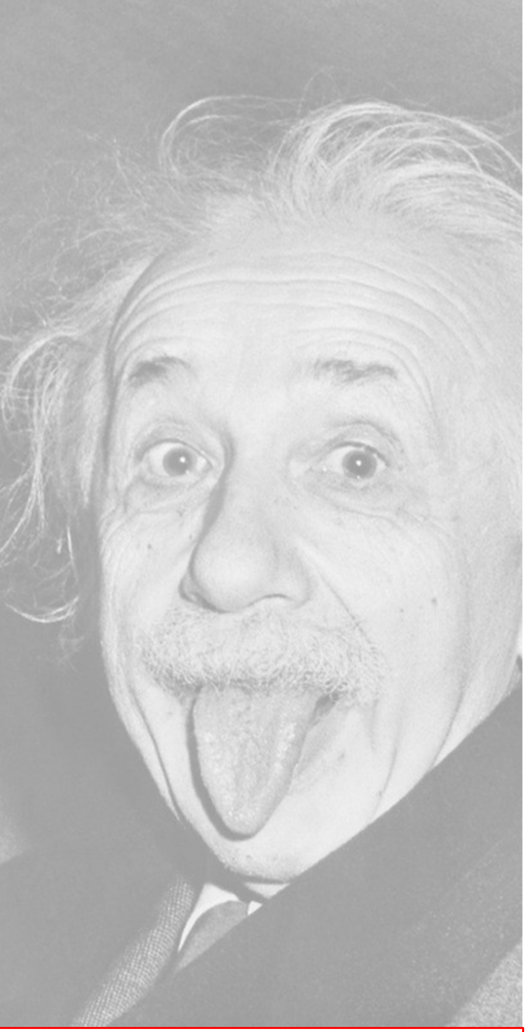
인덱스 $j$의 경우에는 분자 분모에 동일하게 나타나 있으므로, not free; 인덱스 $i$는 free. 따라서…

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} + b_1 = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$

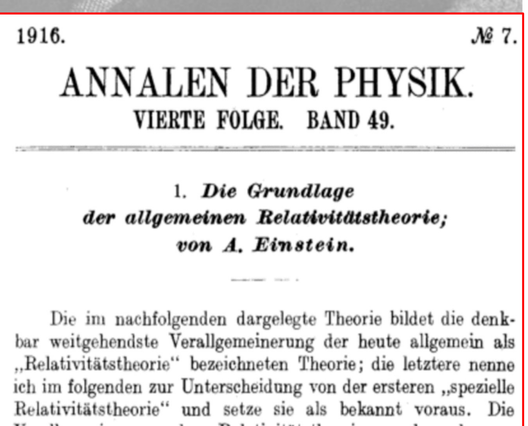
$$\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + b_2 = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} + b_3 = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$

# Einstein summation convention
(Einstein notation)



- Albert Einstein이 벡터와 텐서등의 물리량을 이용하여 그의 이론을 논문으로 쓰면서 (그의 물리법칙과는 무관한) 재미있는 사실을 하나 관찰했다.
- 벡터나 텐서가 inner dot, cross product, 등등의 operations 참여하면서 '덧셈'이 있을시에 반드시 해당 subscript가 두번씩 나타나고, 반대로 subscript가 두번씩 반복되어 나타나면 '덧셈'이 존재한다는 것이다.
- 따라서, 언제나 두개의 동일한 subscript가 나타나면 간단히 summation 기호를 없애도 된다고 생각했다.
- 예를 들면 $x_i y_i$와 같은 표현이 수식에 나오면 이것은 따로 말을 하지 않더라도 $\sum_i^n x_i y_i$ 을 의미한다는 사실이다 (이때 n은 물리량이 표혀된 공간의 차원이다).
- 유사하게, 만약 두쌍의 subscript가 반복된다면, 두개의 summation 기호가 생략된다.



1916. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;*
*von A. Einstein.*

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Die

# Examples of Einstein summation

- $\boldsymbol{x} = x_i \mathbf{e}_i = \sum_i^{n} x_i \mathbf{e}_i = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$
- $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i = x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n$
- $\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = x_j \delta_{ij} = x_i \begin{cases} \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{e}_1 = x_1 \\ \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{e}_2 = x_2 \\ \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{e}_3 = x_3 \end{cases}$

The last equation defines the components of vector.
The same can be referred to as ‘projection’ of $\boldsymbol{x}$ on the $\mathbf{e}_i$ axis. ($\boldsymbol{x}$벡터의 $\mathbf{e}_i$축으로의 내적)