Linear *isotropic* elasticity

- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- $\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$
- λ and μ in the above denote the Lame parameters.

- $\sigma_{11} = \lambda\delta_{11}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{11}$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\
&= \lambda(\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{11}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\
&= \lambda(\varepsilon_{11} - 2\nu\varepsilon_{11}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\
&= (\lambda - 2\nu + 2\mu)\varepsilon_{11}
\end{aligned}$$

Reduction to Voigt notation

- $\sigma_{21} = \mathbb{E}_{2111}\varepsilon_{11} + \mathbb{E}_{2112}\varepsilon_{12} + \mathbb{E}_{2113}\varepsilon_{13} + \mathbb{E}_{2121}\varepsilon_{21} + \mathbb{E}_{2122}\varepsilon_{22} + \mathbb{E}_{2123}\varepsilon_{23} + \mathbb{E}_{2131}\varepsilon_{31} + \mathbb{E}_{2132}\varepsilon_{32} + \mathbb{E}_{2123}\varepsilon_{33}$

- $$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{2111} \\ \mathbb{E}_{2112} \\ \mathbb{E}_{2113} \\ \mathbb{E}_{2121} \\ \mathbb{E}_{2122} \\ \mathbb{E}_{2123} \\ \mathbb{E}_{2131} \\ \mathbb{E}_{2132} \\ \mathbb{E}_{2133} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{2111} \\ 2\mathbb{E}_{2112} \\ 2\mathbb{E}_{2113} \\ - \\ \mathbb{E}_{2122} \\ 2\mathbb{E}_{2123} \\ - \\ - \\ \mathbb{E}_{2133} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ - \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ - \\ - \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{2111} \\ \mathbb{E}_{2122} \\ \mathbb{E}_{2133} \\ 2\mathbb{E}_{2123} \\ 2\mathbb{E}_{2113} \\ 2\mathbb{E}_{2112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- $$or \quad = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{2111} \\ \mathbb{E}_{2122} \\ \mathbb{E}_{2133} \\ \mathbb{E}_{2123} \\ \mathbb{E}_{2113} \\ \mathbb{E}_{2112} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$ with $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ and so forth

$$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{21,1} \\ \mathbb{E}_{21,2} \\ \mathbb{E}_{21,3} \\ \mathbb{E}_{21,4} \\ \mathbb{E}_{21,5} \\ \mathbb{E}_{21,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{3} \\ \gamma_{4} \\ \gamma_{5} \\ \gamma_{6} \end{bmatrix}$$

with $(1,1) \rightarrow (1), (2,2) \rightarrow (2), (3,3) \rightarrow (3)$
$(2,3) \rightarrow (4), (1,3) \rightarrow (5), (1,2) \rightarrow (6)$

Reduction to Voigt notation

$$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{21,1} \\ \mathbb{E}_{21,2} \\ \mathbb{E}_{21,3} \\ \mathbb{E}_{21,4} \\ \mathbb{E}_{21,5} \\ \mathbb{E}_{21,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

with $(1,1) \rightarrow (1), (2,2) \rightarrow (2), (3,3) \rightarrow (3)$
$(2,3) \rightarrow (4), (1,3) \rightarrow (5), (1,2) \rightarrow (6)$

$$\sigma_{21} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{21,1} \\ \mathbb{E}_{21,2} \\ \mathbb{E}_{21,3} \\ \mathbb{E}_{21,4} \\ \mathbb{E}_{21,5} \\ \mathbb{E}_{21,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

with $(1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (6)$

$$\sigma_{6} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{6,1} \\ \mathbb{E}_{6,2} \\ \mathbb{E}_{6,3} \\ \mathbb{E}_{6,4} \\ \mathbb{E}_{6,5} \\ \mathbb{E}_{6,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

with $(1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (6)$

Reduction to Voigt notation

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_i = \mathbb{E}_{ij}\varepsilon_j$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{E}_{1111} & \mathbb{E}_{1122} & \mathbb{E}_{1133} & \mathbb{E}_{1123} & \mathbb{E}_{1113} & \mathbb{E}_{1112}\\ \mathbb{E}_{2211} & \mathbb{E}_{2222} & \mathbb{E}_{2233} & \mathbb{E}_{2223} & \mathbb{E}_{2213} & \mathbb{E}_{2212}\\ \mathbb{E}_{3311} & \mathbb{E}_{3322} & \mathbb{E}_{3333} & \mathbb{E}_{3323} & \mathbb{E}_{3313} & \mathbb{E}_{3312}\\ \mathbb{E}_{2311} & \mathbb{E}_{2322} & \mathbb{E}_{2333} & \mathbb{E}_{2323} & \mathbb{E}_{2313} & \mathbb{E}_{2312}\\ \mathbb{E}_{1311} & \mathbb{E}_{1322} & \mathbb{E}_{1333} & \mathbb{E}_{1323} & \mathbb{E}_{1313} & \mathbb{E}_{1312}\\ \mathbb{E}_{1211} & \mathbb{E}_{1222} & \mathbb{E}_{1233} & \mathbb{E}_{1223} & \mathbb{E}_{1213} & \mathbb{E}_{1212}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{E}_{11} & \mathbb{E}_{12} & \mathbb{E}_{13} & \mathbb{E}_{14} & \mathbb{E}_{15} & \mathbb{E}_{16}\\ \mathbb{E}_{21} & \mathbb{E}_{22} & \mathbb{E}_{23} & \mathbb{E}_{24} & \mathbb{E}_{25} & \mathbb{E}_{26}\\ \mathbb{E}_{31} & \mathbb{E}_{32} & \mathbb{E}_{33} & \mathbb{E}_{34} & \mathbb{E}_{35} & \mathbb{E}_{36}\\ \mathbb{E}_{41} & \mathbb{E}_{42} & \mathbb{E}_{43} & \mathbb{E}_{44} & \mathbb{E}_{45} & \mathbb{E}_{46}\\ \mathbb{E}_{51} & \mathbb{E}_{52} & \mathbb{E}_{53} & \mathbb{E}_{54} & \mathbb{E}_{55} & \mathbb{E}_{56}\\ \mathbb{E}_{61} & \mathbb{E}_{62} & \mathbb{E}_{63} & \mathbb{E}_{64} & \mathbb{E}_{65} & \mathbb{E}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_1\\ \epsilon_2\\ \epsilon_3\\ \epsilon_4\\ \epsilon_5\\ \epsilon_6\end{bmatrix}$$