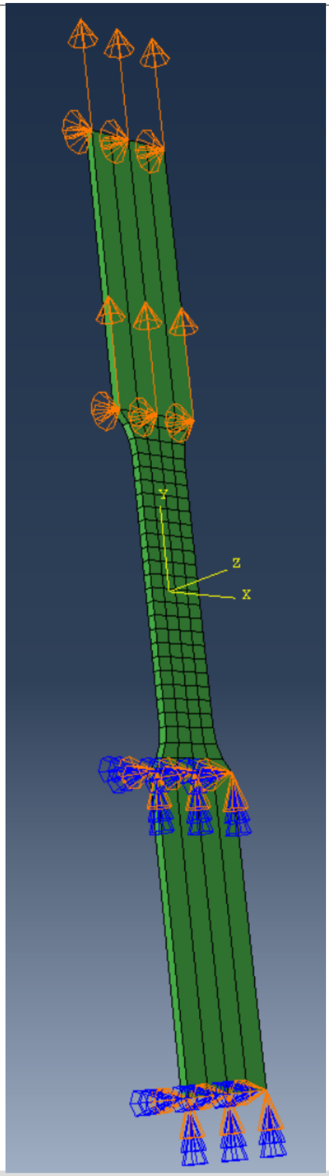
Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- Principal space의 $\mathbf{e}_2$ 방향으로의 가상 '일축 인장' 실험을 생각해보자.



Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- $\sigma = \mathbb{E}\varepsilon$
- *변형률이 scalar, 응력 또한 scala로 표현 가능하다는 가정하에서, 재료의 특성인 탄성 계수만 안다면, 변형률에 따라 달라지는 응력을 찾을 수 있다.*
- *응력과 변형률이 텐서로 표현된다면, 위의 관계는 다음과 같이 확장된다.*
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

Principal space and Hooke's law (1)

- 응력과 변형률간의 관계는 Hooke's law를 따르며, 그 둘간 '선형' 관계를 설명하는 법칙이다.
- $\sigma = \mathbb{E}\varepsilon$
- *변형률이 scalar, 응력 또한 scala로 표현 가능하다는 가정하에서, 재료의 특성인 탄성 계수만 안다면, 변형률에 따라 달라지는 응력을 찾을 수 있다.*
- *응력과 변형률이 텐서로 표현된다면, 위의 관계는 다음과 같이 확장된다.*
- $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

$\mathbb{E}_{ijkl}$: *탄성계수 텐서*

Principal space and Hooke's law (1)

- 따라서, 예를 들어 stress 텐서의 한 성분 $\sigma_{21} = \mathbb{E}_{21kl}\varepsilon_{kl}$

- $\sigma_{21} = \sum_k^3 \sum_l^3 \mathbb{E}_{21kl}\varepsilon_{kl}$

- $\sigma_{21} = \mathbb{E}_{2111}\varepsilon_{11} + \mathbb{E}_{2112}\varepsilon_{12} + \mathbb{E}_{2113}\varepsilon_{13} + \mathbb{E}_{2121}\varepsilon_{21} + \mathbb{E}_{2122}\varepsilon_{22} + \mathbb{E}_{2123}\varepsilon_{23} + \mathbb{E}_{2131}\varepsilon_{31} + \mathbb{E}_{2132}\varepsilon_{32} + \mathbb{E}_{2123}\varepsilon_{33}$

- $\sigma_{23}?$

Principal space and Hooke's law (1)

- 따라서, 예를 들어 stress 텐서의 matrix 형태에서의 diagonal symmetry?
- $\sigma_{21} = \mathbb{E}_{21kl}\varepsilon_{kl} = \sigma_{12} = \mathbb{E}_{12kl}\varepsilon_{kl}$
- $\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{jikl}$
- 마찬가지로, strain 텐서의 diagonal symmetry?
- $\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{jilk}$
- 둘을 모두 고려하면
- $\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{jikl} = \mathbb{E}_{ijlk} = \mathbb{E}_{jilk}$

Principal space and Hooke's law (1)

- 따라서, stress 텐서와 변형률텐서가 모두 principal 값으로 표현되는 좌표계가 일치하다면 다음과 같이 표현가능.
- $\sigma_i = \mathbb{E}_{ij}\varepsilon_j$

Principal space and Hooke's law (1)

- 따라서, stress 텐서와 변형률텐서가 모두 principal 값으로 표현되는 좌표계가 일치하다면 다음과 같이 표현가능.

- $$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{11} & \mathbb{E}_{12} & \mathbb{E}_{13} \\ \mathbb{E}_{21} & \mathbb{E}_{22} & \mathbb{E}_{23} \\ \mathbb{E}_{31} & \mathbb{E}_{32} & \mathbb{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Principal space and Hooke’s law (1)

- 만약 일축인장이 2축 방향으로 생기고, 해당 문제에서 주어진 좌표계에서 응력과 변형률의 전단 성분이 모두 0 된다고 한다. 이때 재료가 탄성 거동을 한다면, 해당 재료의 변형률 상태는 어떻게 되나?
- $$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{11} & \mathbb{E}_{12} & \mathbb{E}_{13} \\ \mathbb{E}_{21} & \mathbb{E}_{22} & \mathbb{E}_{23} \\ \mathbb{E}_{31} & \mathbb{E}_{32} & \mathbb{E}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$
- 탄성 계수의 역은 탄성 컴플라이언스 $(elastic\ compliance)\ \mathbb{E}^{-1} = \mathbb{C}$
- $$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$
- With $\sigma_2 \neq 0, while \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \text{what}'\text{s}\ \varepsilon_1$? And ε_2? And ε_3? What’s going to be the Poisson ratio?

Principal space and Hooke's law (1)

- $$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$
- With $\sigma_2 \neq 0, while \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \text{what's } \varepsilon_1$? And ε_2? And ε_3? What's going to be the Poisson ratio?