Stress and strain: Strain tensor

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Strain tensor

- Strain 물리량은 shape change를 정량적으로 표현할때 geometrical effect를 *줄여* (혹은 제거하여) 나타낸다.
- Strain 물리량도 stress 와 마찬가지로 2nd order tensor로 나타낸다.
- 앞으로 1차원의 strain부터 3차원까지 점점 차원을 높이면서 이해하도록 하겠다.

- Cauchy stress가 역학에서 prevail. 하지만 strain의 경우 몇몇 구분되는 방법들이 존재한다.
  - Finite strain theory (not discussed in the current lecture)
  - Small strain theory (infinitesimal strain theory; small deformation theory; small displacement-gradient theory and so forth..)

Strain tensor

- 응력 텐서를 설명할때, 3차원 공간상에 3개의 수직면에 작용할 수 있는 응력 성분을 제시하여 설명하였다.
- 변형률 텐서도 이와 유사하게, 3차원 공간상에 3개의 수직한 '선'을 가지고 설명할 수 있다.
- 변형률 텐서를 배우며 가장 주의해야할 것은 전단 변형 성분이 '회전'으로 이어질 수 있으며, 이는 '변형률'에서 제외 되어야 한다는 점이다.

1차원 strain

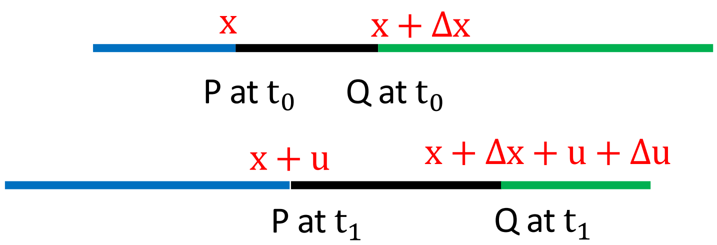
- 1차원의 좌표계로 설명이 가능한 **<u>‘길이’ 의 무한소</u>**로 설명하자.

Δx: Initial length
Δu: 1D displacement
u: translation

o $\mathbf{e}_1$
1차원 좌표계
($\mathbf{e}_1$:basis vector)

시간 = t_0

시간 = t_1



일차원 변형률 $\frac{\Delta u}{\Delta x}$

늘어날 수 있는
1차원적 구조물 (선)
에서 위의 해석을
생각해보면 ...

위치에 따라
다른 변형
가능!

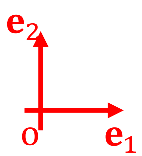
아주 짧은 시간내에서
생긴 변화라면, Δu와 Δx
모두 매우 작은 값

주어진 전체 물질의 아주 작은 점 마다 각기 다른
strain을 가질 수도 있다. (비균질한 변형률 발생)

2차원 strain#2 (small strain)

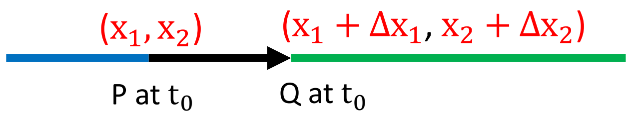
▪2차원의 좌표계로 설명이 가능한 ‘길이’ 단위의 무한소로 설명하자.

한 점의 좌표: (x_1, x_2)



2차원 좌표계
($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ basis vectors)

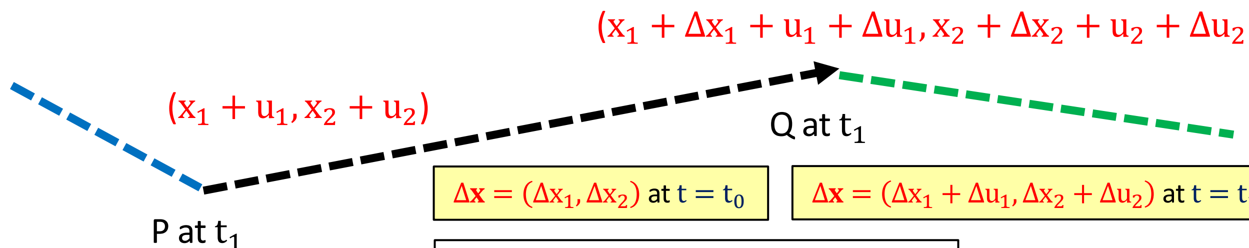
시간 = t_0



$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ at $t = t_0$

시간 $\Delta t\ (= t_1 - t_0)$ 이 지나며 물질 무한소의 각 점 P, Q에게는 각각 u_i의 이동(translation)과 Δu_i의 변위(displacement) vector가 발생했다.

시간 = t_1

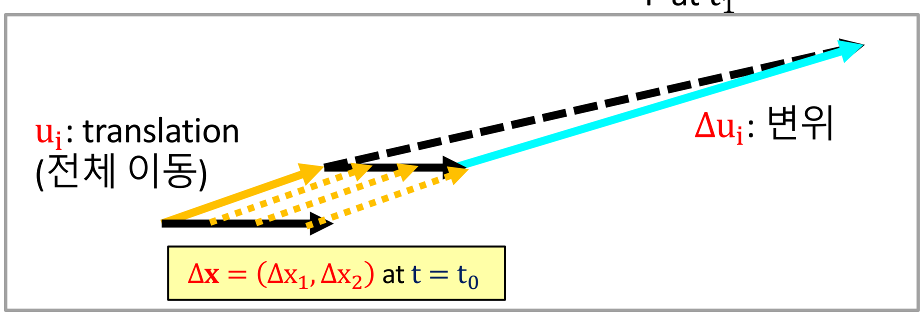


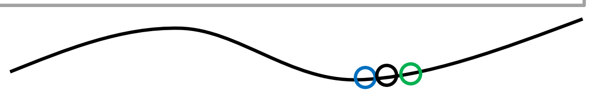
$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$ at $t = t_0$

$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1 + \Delta u_1, \Delta x_2 + \Delta u_2)$ at $t = t_1$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$: translation **vector**

$\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2)$: displacement **vector**





주어진 전체 물질의 아주 작은 점 마다 각기 다른 strain을 가질 수도 있다. (비균질한 변형률 발생)

2차원에서의 2nd order tensor **d** 의 정의

tensor **d** 는 ‘변형률’ 텐서가 아니다

$$d_{ij} = \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} \boxed{= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

2차원 strain#3 (small strain)

$$d_{ij} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1,2)$$

tensor d의 물리적 의미?

무한소 물질점에서 임의의 운동에 의해 발생하는 (무한히 작은)길이 벡터의 변화를 설명해준다.

물질에 어떠한 운동이 발생한다면, 특정 물질점의 길이 벡터($\mathbf{\Delta x}$)에 해당하는 변위 벡터($\mathbf{\Delta u}$)를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta u_i = d_{ij} \Delta x_j$$

Small strain theory 에 따르면 앞서 정의된 d_{ij} 텐서의 각 성분값은 1보다 무척 작아야 한다.

Kronecker delta and deformation gradient

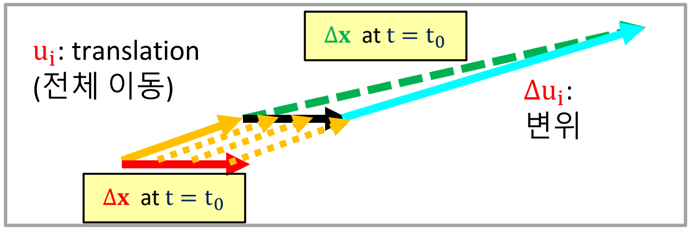
다른 하나 중요한 물리량 중 하나는
Deformation grandient tensor $\boldsymbol{F}$:

$$F_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}$$

δ_{ij} 는 Kronecker delta 라 불리며 다음의 성질을 따른다.

If $i = j, \delta_{ij} = 1$

If $i \neq j, \delta_{ij} = 0$

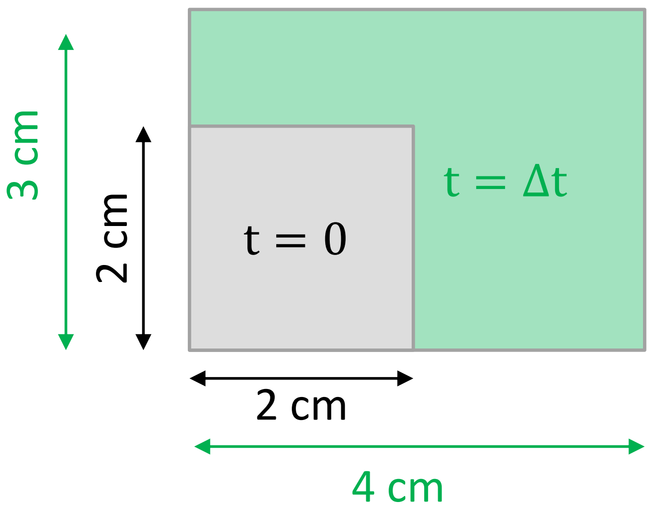


$\boldsymbol{F}$ 의 중요 성질:

$$\Delta x_i^{t=t_1} = F_{ij} \Delta x_j^{t=t_0}$$

예제

한 물체가 다음과 같이 어떠한 운동에 의해 '**균일하게**' 변형이 되었다.



Displacement gradient tensor

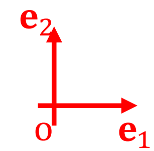
$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{4-2}{2}$$

$$d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{3-2}{2}$$

$$d_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$$

$$d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$

한 점의 좌표: (x_1, x_2)



2차원 좌표계
($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ basis vectors)

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij}$$

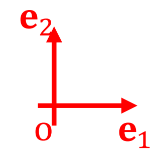
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

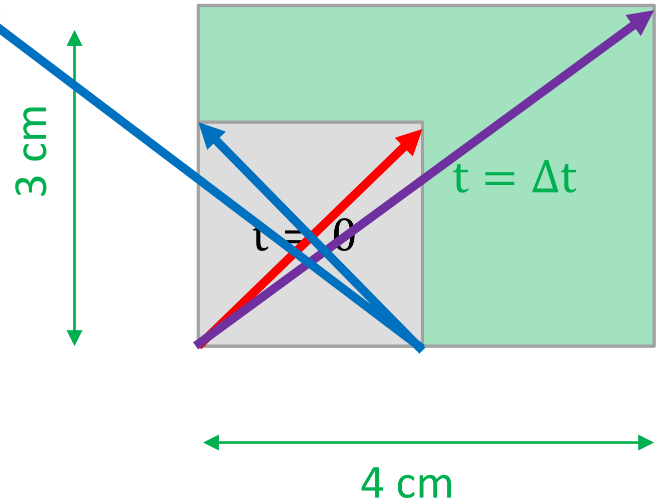
예제

한 물체가 다음과 같이 어떠한 운동에 의해 ‘**균일하게**’ 변형이 되었다.

한 점의 좌표: (x_1, x_2)

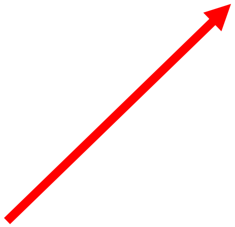


2차원 좌표계
($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ basis vectors)



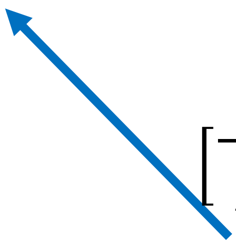
$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} l_j = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} l_j = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}$$

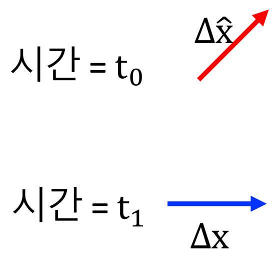
F_{ij} does not account for ‘translation’

2차원 strain#4 (small strain)

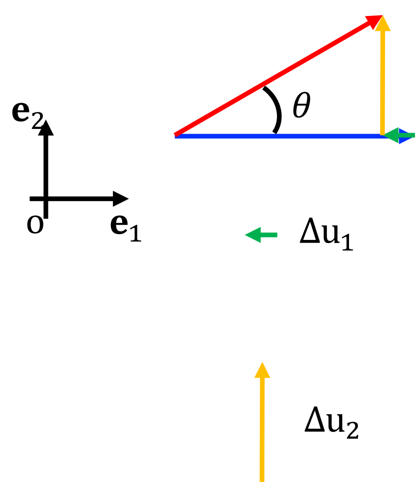
앞서 tensor d 가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor d 는 strain을 나타낼 수 없는가?

가정:
Tensor d 이 strain tensor 라면,
변형이 발생하지 않았을 때 모든 component가 0이어야 마땅하다.

Tensor d 성분이 0이 아님에도 불구하고 변형률이 0인 경우가 있다. 그런 경우는 바로 ... Rigid Body Rotation (RBR) 즉 물질 전체가 한축을 기준으로 회전하는 경우 Tensor d 성분중에 일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인 경우가 있다.



길이 변화 없이 '회전'만 발생시키는 displacement (변위) Δu_i 발생



Small strain theory는 주어진 물질 무한소의 길이보다 '훨씬' 작은 displacement 발생시에만 적용가능함에 유의

위에서 $\tan\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x + \Delta u_1}$

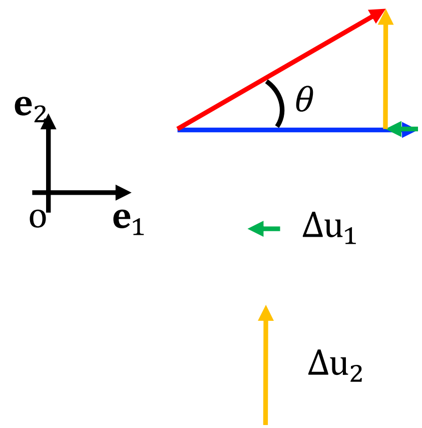
하지만 $\Delta x \gg \Delta u_1$ 따라서

$$\tan\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}$$

2차원 strain#5 (small strain)

앞서 tensor d 가 strain tensor가 아니라고 하였다. 그렇다면 tensor d 는 strain을 나타낼 수 없는가?

Tensor d 성분이 0이 아님에도 불구하고 변형률이 0인 경우가 있다. 그런 경우는 바로 ... rigid body rotation 즉 물질 전체가 한축을 기준으로 회전하는 경우 Tensor d 성분중에 일부가 0이 되지 않지만 변형률은 0인 경우가 있다.



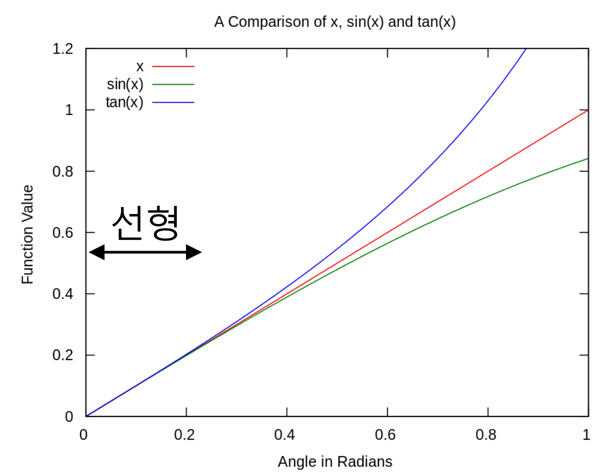
Small strain theory는 주어진 물질 무한소의 길이보다 '훨씬' 작은 displacement 발생시에만 적용가능함에 유의

위에서 $\tan\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x + \Delta u_1}$

하지만$\Delta x \gg \Delta u_1$ 따라서

$$\tan\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x}$$

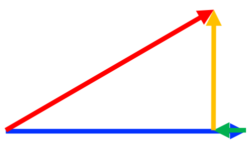
그런데 small strain theory에서는 θ 값이 아주 작다. 그럴때는 $\tan\theta \approx \theta$ (선형)



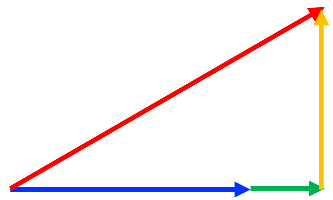
따라서 해당 변위 (RBR)에서 d_{21} 값 θ 로 근사될 수 있으며, 이 값은 작지만 0은 아니므로... 길이 변화가 없는 변위에서도 d의 성분이 0이 아님을 보인다.

따라서 텐서 d는 변형률을 설명하기에 적절하지 않다.

2차원 strain#6 (small strain)

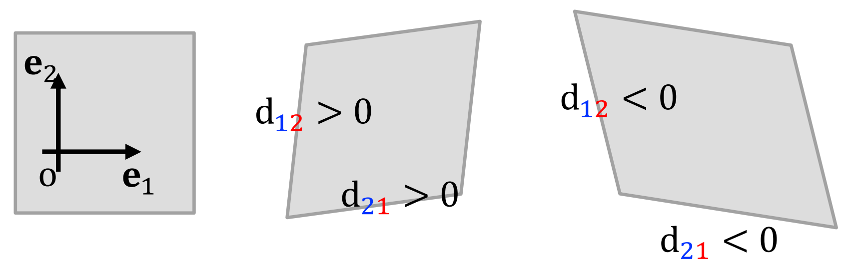


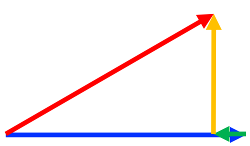
Rigid body
rotation



Rigid body
rotation+stretching

적절한 변형률 텐서는 RBR을 제외한
정도를 얻어야 한다.

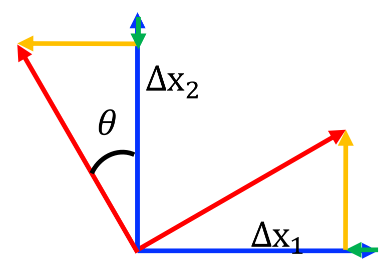




Rigid body
rotation

$$\tan\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1} \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \approx \theta$$

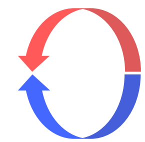
$$\epsilon_{21} \approx \theta$$



$$\tan\theta = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2 + \Delta u_2} \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} \approx \theta$$

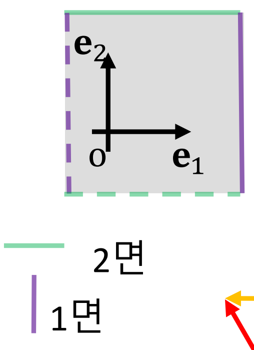
$\epsilon_{12} \approx -\theta$ (음수)

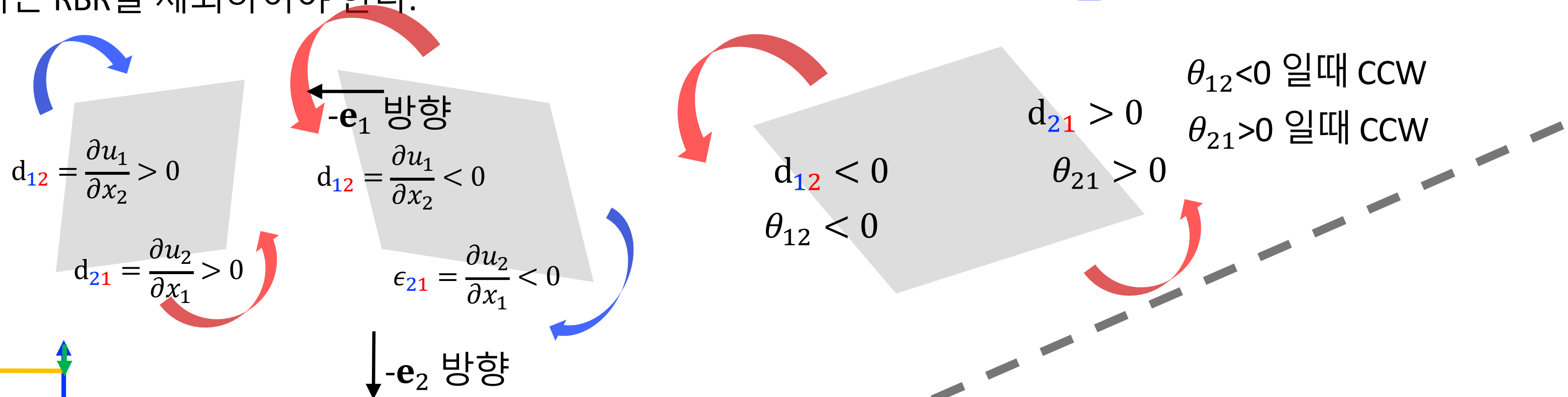
2차원 strain#7 (small strain)

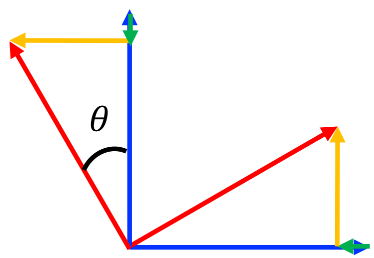


적절한 변형률 텐서를 구하기
위해서는 RBR을 제외하여야 한다.

$$\mathrm{d}_{21} = \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial \mathrm{x}_1}$$





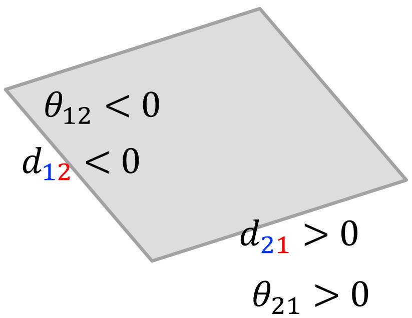


$\frac{\theta_{21}-\theta_{12}}{2}$ → 전체 CCW 회전 평균

$$\frac{\theta_{21}-\theta_{12}}{2} \approx \frac{\mathrm{d}_{21}-\mathrm{d}_{12}}{2}$$

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij}-d_{ji})}{2} \qquad \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}^T}{2}$$

2차원 strain#8 (small strain)



θ_{12}>0 일때 CW임을 확인

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \longrightarrow$$ 전체 CCW 회전 평균

$$\frac{\theta_{21} - \theta_{12}}{2} \approx \frac{d_{21} - d_{12}}{2}$$ Small strain theory

$$w_{ij} = \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} \qquad \boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^T}{2}$$

따라서 $\boldsymbol{d}$ tensor에서 ccw 회전을 제외 한다면, 즉

$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{w}$ 을 한다면 ccw의 RBR을 제외한 순수 변형률을 나타낼 수 있다.

따라서 strain tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$는 아래와 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{w}$$

$$\varepsilon_{ij} = d_{ij} - \frac{(d_{ij} - d_{ji})}{2} = \frac{d_{ij}}{2} + \frac{d_{ji}}{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^T}{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

비슷하게 strain rate tensor는

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \dot{\boldsymbol{u}} = \text{velocity}$$

3차원 strain#9 (small strain)

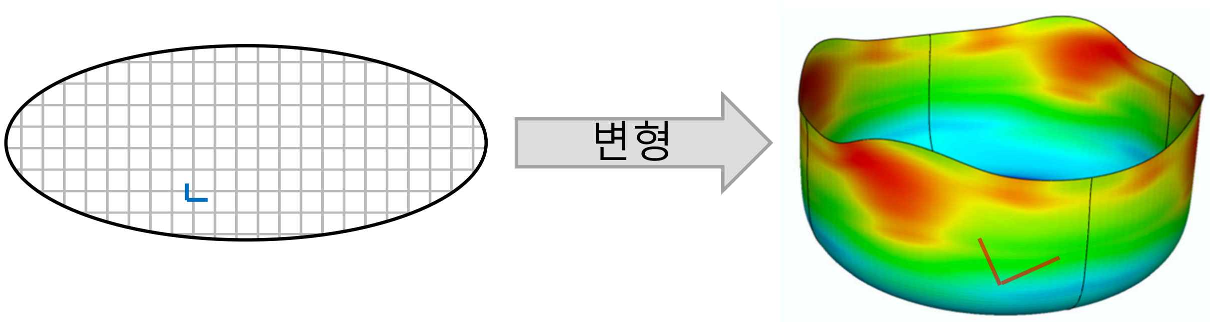
- 2차원 변형률의 정의의 3차원으로의 확장
- 앞서 다루었던 $\boldsymbol{\epsilon}$ tensor는 deformation tensor (small strain theory) 라고도 불림
- $\boldsymbol{w}$ tensor는 spin tensor
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ tensor는 small strain theory에서의 strain tensor.

Displacement and strain

- Goal: Displacement와 strain의 관계를 이해하고 더 나아가 displacement에서 strain을 ’추출’ 해낼 수 있는 방법을 이해한다.

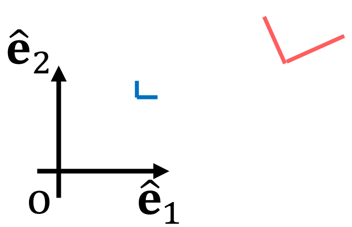
Blank sheet

Cup

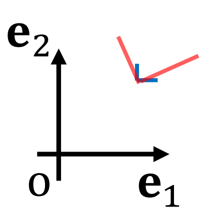


- Translation
- Rotation
- Extension (Contraction) and shear

1. 공통 좌표계에서 표기



2. Translation 제거



Displacement gradient tensor

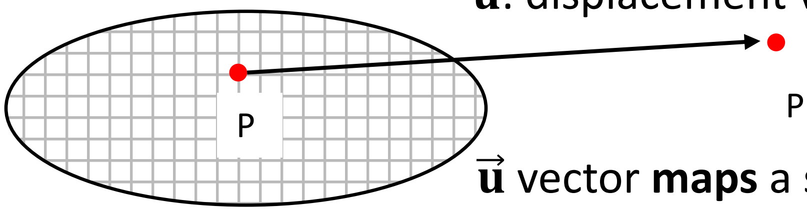
3. Rotation 제거

Strain = The ‘symmetric’ part of displacement gradient tensor

Displacement and strain

Displacement: 특정 한 점이 차지하던 position을 또 다른 position으로 옮겨준다.

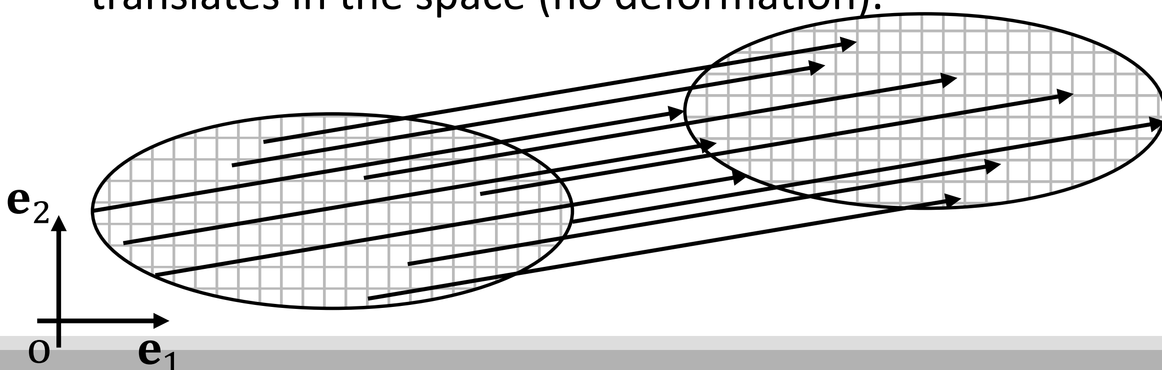
$\vec{\mathbf{u}}$: displacement vector



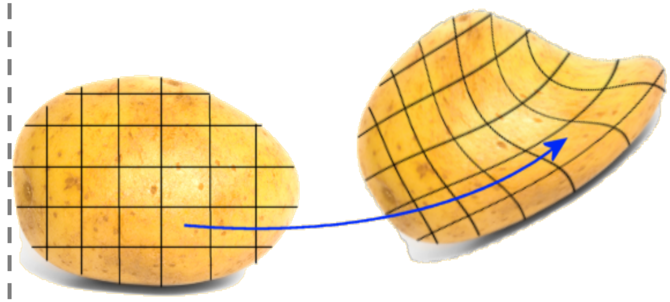
$\vec{\mathbf{u}}$ vector **maps** a single point P to P`

$\vec{\mathbf{u}}(x_1, x_2)$: displacement vector **field** maps various points to various points.

In case $\vec{\mathbf{u}}$ field is uniform, which means that $\vec{\mathbf{u}}$ is the same for all points, the material only translates in the space (no deformation).



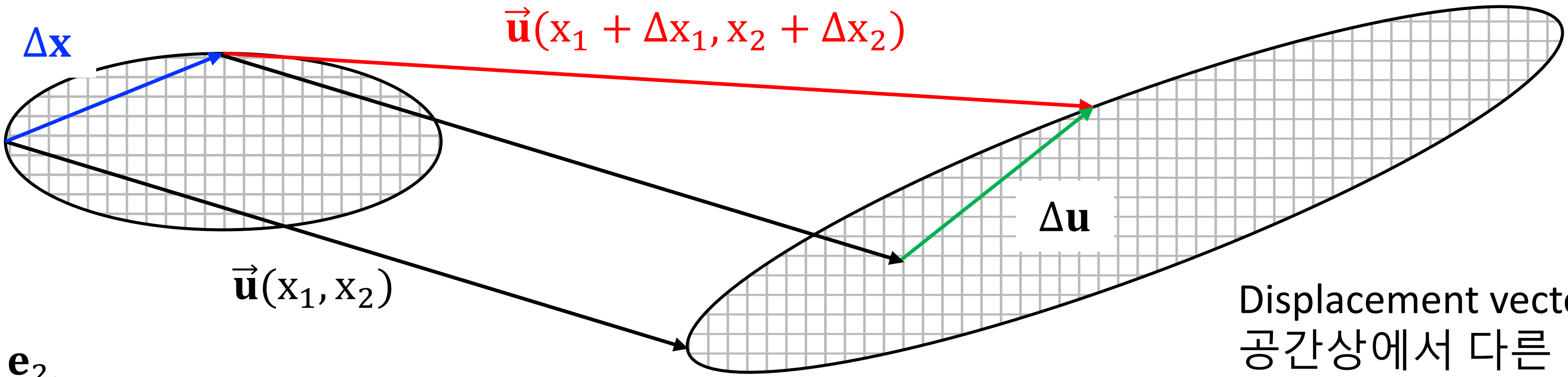
Deformation occurs only when $\vec{\mathbf{u}}$ field is not uniform, which means that $\vec{\mathbf{u}}$ varies when changing the locations.

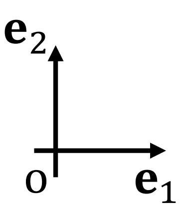


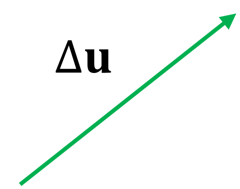
Warning: there are cases that $\vec{\mathbf{u}}$ field is not uniform, but no deformation occurs (We'll get back to this later).

Displacement and strain

In case $\vec{\mathbf{u}}(x_1, x_2)$ is not uniform (case 1)





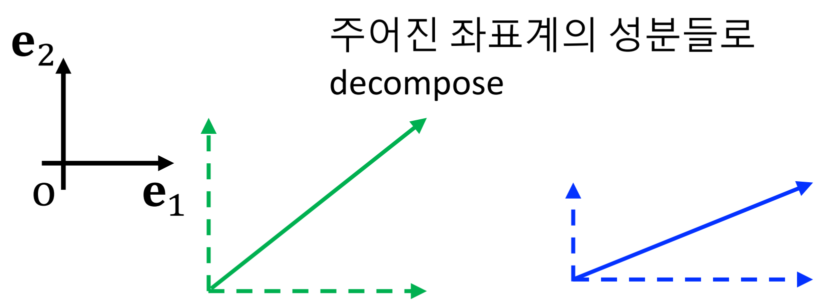


Displacement vector 가
공간상에서 다른
좌표로 따라 바뀐 차이

좌표에 대한 함수, 즉

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$$

파란 화살표로 옮겨진 점의 물질은 기준이 되는 점에 비해 녹색으로 표현된 만큼 차이나는 점으로 옮겨졌다.



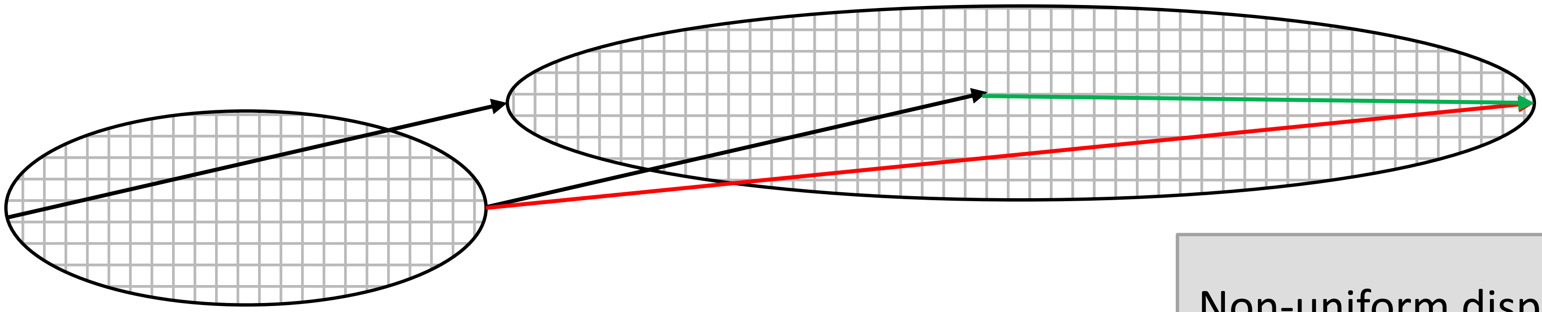
$\boxed{\Delta\mathbf{u} = \Delta u_1\mathbf{e}_1 + \Delta u_2\mathbf{e}_2}$ $\boxed{\Delta\mathbf{x} = \Delta x_1\mathbf{e}_1 + \Delta x_2\mathbf{e}_2}$

$\vec{\mathbf{u}}$ 가 공간에 따라 어떻게
얼마나 달라지는지
나타내는 수학적 방법
(gradient)

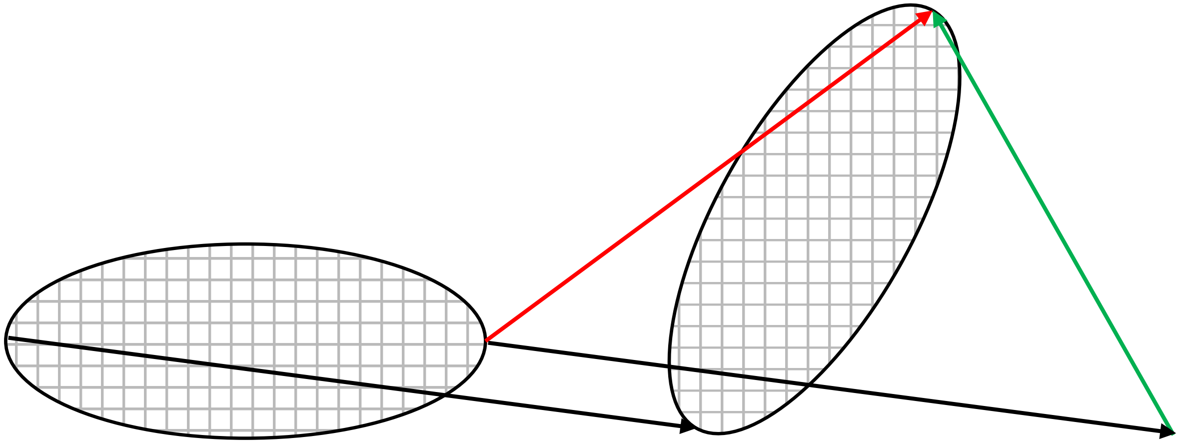
$\frac{\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})}{\Delta\mathbf{x}} = \mathbf{d}(\mathbf{x})$ 로 표기
하자.

Displacement and strain

In case $\vec{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3)$ is not uniform (case 1; pure stretching)



In case $\vec{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3)$ is not uniform (case 2; pure rotation)



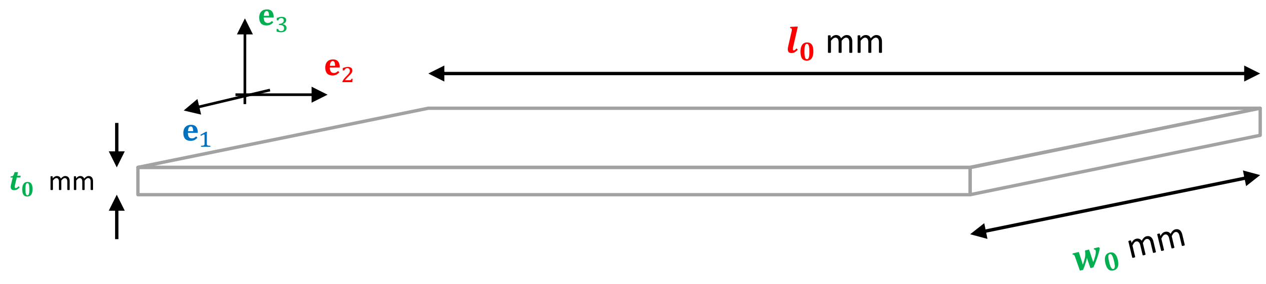
Non-uniform displacement field does not always mean that the material is 'deformed'.
Non-uniform displacement field may contain a contribution from 'rotation'.

Therefore, if you want to 'extract' only the 'deformation', you have to exclude 'rotational' contribution from the displacement field.

Displacement gradient to strain

- $d_{ij} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(d_{ij} + d_{ji}\right)$
- 위 특성으로 인해
- $\varepsilon_{ij}^{T} = \varepsilon_{ij}$ (즉, symmetry 가진다)

Example



위의 금속 판재에 냉간 압연을 하여 두께,너비,길이가 각각 t_1, w_1, l_1 으로 바뀌었다.

- 부피 변형률 $\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ 값을 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ 요소로 표현하여라.

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{l_1 w_1 t_1}{l_0 w_0 t_0} \qquad (1)$$

(1) 의 양변에 자연 로그를 사용하면

$$\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{w_1}{w_0}\right) + \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right) = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}$$

따라서 부피변화가 없다면, 즉 $\ln(1) = 0$, 따라서 $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$

Example

- 전단 변형률은 부피 변화와 무관하다.

- Let’s check

This excell sheet proves a means of coordinate system transformation

		angle	radian
	phi1	45	0.785
Three Euler angles	Phi	30	0.524
	phi2	20	0.349

삼각 함수 값들

cos(phi1)	0.707	sin(phi1)	0.707
cos(Phi)	0.866	sin(Phi)	0.500
cos(phi2)	0.940	sin(phi2)	0.342

transformation matrix R

0.455	0.874	0.171
-0.817	0.334	0.470
0.354	-0.354	0.866

(transformation matrix)^t= R^t=R^-1

0.455	-0.817	0.354
0.874	0.334	-0.354
0.171	0.470	0.866

2nd rank tensor in matrix form

1	0	0
0	-1	0
0	0	2

R.T

0.455	-0.874	0.342
-0.817	-0.334	0.940
0.354	0.354	1.732

R^t.R.T **2nd rank tensor after coordinate transformation**

-0.498	-0.503	0.766
-0.503	0.998	0.643
0.766	0.643	1.500

1st rank tensor (i.e., vector) in array form

1
0
0

R.v 1st rank tensor (vector) after coordinate transformation

0.4550193	-0.8172866	0.3535534

Recap

- Measurement of force and displacement from tension tests
- Physical quantity to remove the effect of geometry: engineering stress/engineering strain
- Two types of stress (strain):
  - Normal (tension + , or compression -)
  - Shear (forward +, backward -)
- There are three independent planes in 3D; On each plane 1 normal + 2 shears.
- Thus nine independent components comprise the stress (strain) state.
- Coordinate transformation (axes transformation)
  - Coordinate transformation does not change the physical quantity (stress, strain)
  - Coordinate transformation changes the values of components and the directions of planes associated with the stress (or strain).
- Practice coordinate transformation using the Excel, Fortran code, Python code.

References and acknowledgements

- References
  - An introduction to Continuum Mechanics – M. E. Gurtin
  - Metal Forming – W.F. Hosford, R. M. Caddell (번역판: 금속 소성 가공 - 허무영)
  - Fundamentals of metal forming (R. H. Wagoner, J-L Chenot)
  - http://www.continuummechanics.org (very good on-line reference)
  - http://youngung.github.io/tensors

- Acknowledgements
  - Some images presented in this lecture materials were collected from Wikipedia.