Stress and strain: Basic concepts

강의명: 소성가공 (MSA0026)

정영웅

창원대학교 신소재공학부

YJEONG@CHANGWON.AC.KR

연구실: #52-212 전화: 055-213-3694

HOMEPAGE: HTTP://YOUNGUNG.GITHUB.IO

Outline

- 본 강의에서는 금속의 기계적 성질을 표현하는데 가장 중요한 요소인 응력과 변형률에 대해서 살펴본다.

- 응력과 변형률이 텐서(tensor)로 표현 되는 방법에 대해 알아보고 텐서의 기본적인 성질에 대해 알아보자.

들어가기에 앞서

- 본 강의에서는 여러분들이 낯설게 느낄 많은 '수학적 표현법'이 존재한다. 매우 어렵게 (혹은 낯설게) 느껴질 수 있으나, 포기 하지말고 의문이 있으면 언제든지 질문 하기 바랍니다.

- 낯선 영어 단어가 많이 나올 수도 있습니다. 그때마다 질문하시면 됩니다.

- 강의 중간중간 여러분들의 이해 정도를 파악하기 위해서 질문을 할 수도 있습니다.

오늘의 강의 목표

- 기계적 물성과 그와 관련된 물리량
  - 응력 (stress)
  - 변형률 (strain)
  - 수직/전단 응력요소와 수직/전단 변형률 요소 (normal and shear components)

- 추후에… 후속 강의에서는?
  - 텐서 (tensor) 이해
    - Coordinate transformation rules
    - Coordinate transformation matrix
    - Understand Einstein (summation) convention
  - Euler angles
    - Practice coordinate transformation to vector, 2nd rank tensor using Excel, Fortran, Python…

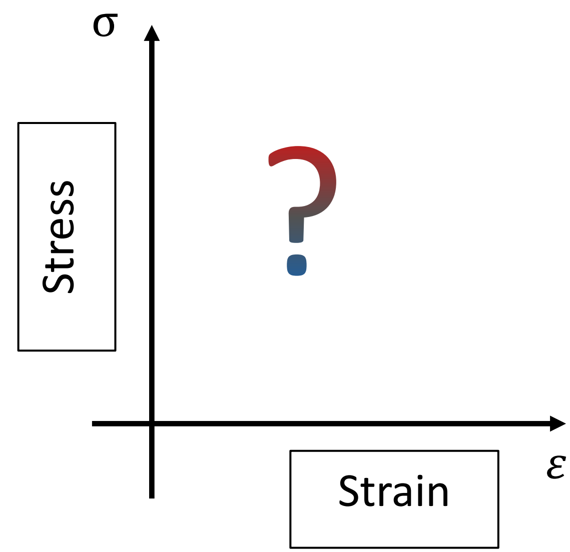
Mechanical stimulus/response

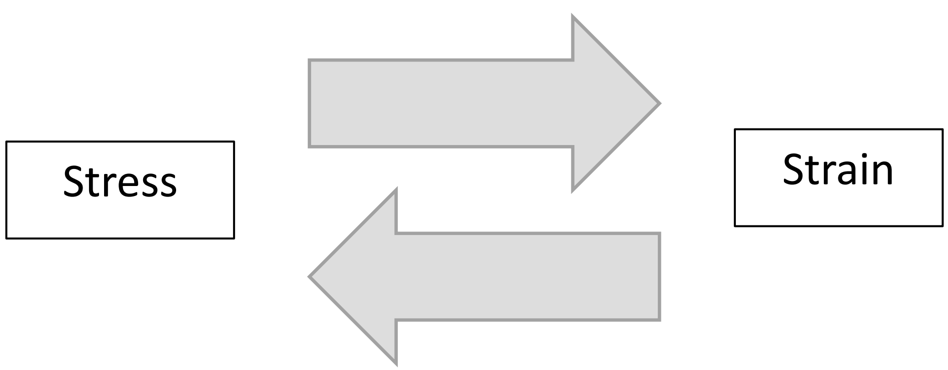
Force
Deformation

Size-dependent

Stress
Strain

Size-independent





관계: material property

Constitutive model;
Constitutive equation
구성방정식

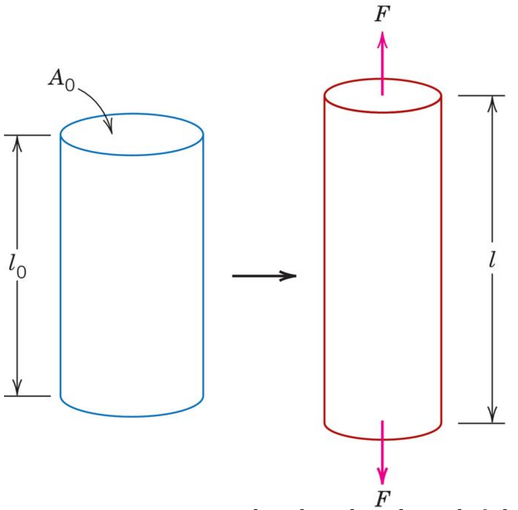
Mechanical stimulus/response + property

- 기계적 성능은, 기계적 자극과 그 자극으로 기인한 기계적 반응사이의 관계를 연결해주는 **연결고리**다.
  - 그러한 연결고리는 여러 형태의 '수학적' 모형으로 나타날 수 있다.
  - 여러분들이 다룰 수학적 모형은 주로 '선형'적이다 (일차 함수의 형태)
- 만약 기계적 자극과 반응이 선형적이라면??
  - **반응**= **성질1**x**자극** + **성질2**
  - **y** = **ax** + **b** 의 형태 (x와 y는 각각 **자극**과 **반응**, **a**와 **b**는 물질의 성질)
  - **자극** = **반응** / **성질1** - **성질2**
- 기계적 자극과 기계적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (간단한 예: 금속의 탄성)
  - $\sigma = \mathbb{E}\varepsilon$ (σ: 응력 $\mathbb{E}$: elastic constants (modulus), ε: 변형률)
- 기계적 자극과 기계적 반응이 매우 비선형적인 관계를 가진 경우
  - 예: 금속의 소성 – 기계적 자극이 충분히 클 때 나타남
    - $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} = \dot{\gamma}_{\circ} \sum_s \left(\frac{\mathbb{m}:\boldsymbol{\sigma}}{\tau_s}\right)^{20}$: 응력 $\boldsymbol{\sigma}$와 소성변형률 속도 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ 는 매우 비선형적 관계를 보인다.
- 기계적 자극과 전기적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (piezo electricity)
  - $\varepsilon = dE$ (ε: strain, d: piezoelectricity constants; E: electric field)

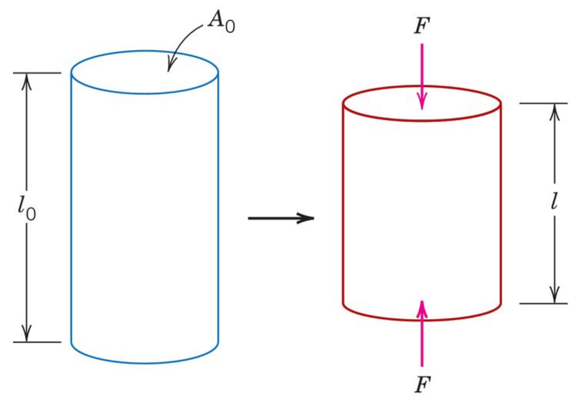
notations

- 변형률은 주로 Greek letter ε, 혹은 ϵ (엡실론)으로 나타낸다.
  - ε을 진변형률, ϵ을 공칭변형률로 구분하는 경우도 있으나, 우리 강의에서는 따로 설명되지 않은한 ε을 구분하지 않고 변형률로 간주하겠다. *간혹 e 기호를 사용하기도..
- 응력의 경우 σ (sigma, 시그마)로 표현하겠다.
  - 마찬가지로 공칭과 진응력이 존재한다. 때에 따라 σ^{engi} 와 σ^{true} 등의 윗첨자 (superscript)를 사용하여 구분하겠다.
- 탄성 계수들
  - $\mathbb{E}$와 $\mathbb{G}$를 각각 (압축/인장) 탄성 계수와 전단 탄성 계수로 구분하여 사용하겠다
  - ν 를 푸아송 비 (Poisson ratio)
- σ^{Y} : yield stress (strength)는 Y 윗첨자를 사용하여 나타내겠다.
- ϵ^{Y} (혹은 ε^{Y}): yield point 에 해당하는 변형률
- σ, τ : 압축/인장 응력 성분 (normal stress component) 그리고 전단 응력 성분 (shear stress component)를 구분할 때 사용
- $\epsilon(\varepsilon), \gamma$: 압축 인장 변형률 성분 (normal strain component) 그리고 전단 변형률 성분 (shear strain component)를 구분할 때 사용하겠다.

구조물에 작용하는 하중의 종류 (from Callister textbook)

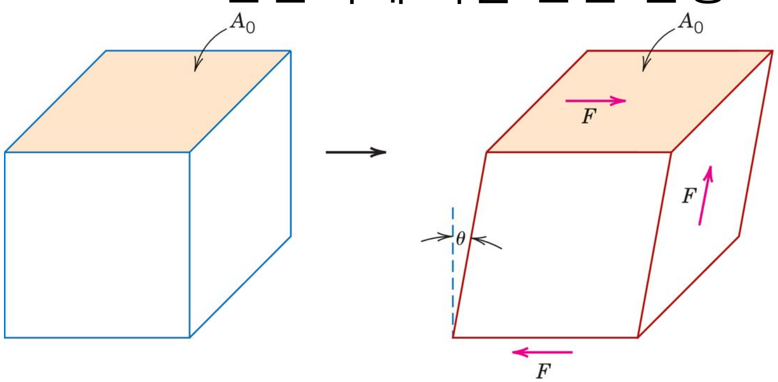


인장
(tension)

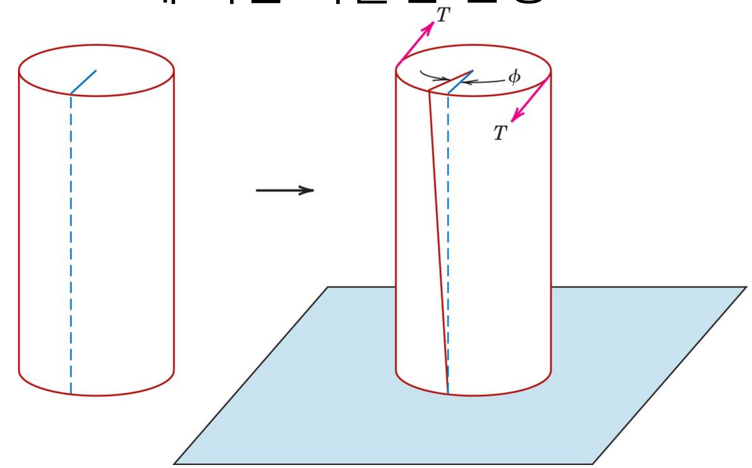


압축
(compression)

전단력에 의한 전단 변형



토크에 의한 비틀림 변형

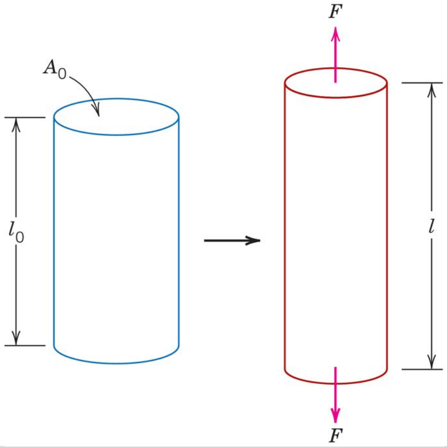


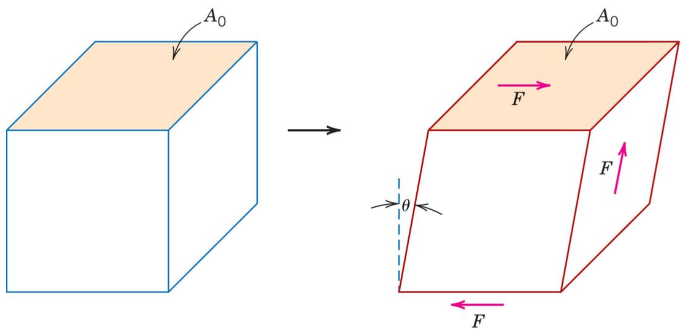
Images from Callister, Int. MSE

수직 응력과 전단 응력

- 응력 구성 성분 (stress component)
  - **수직 응력 성분**(normal stress component) 은 관심 있는 물질 면의 '법선' 방향으로 작용하는 인장 (혹은 압축) 응력 구성요소.
  - **전단 응력 성분**(shear stress component)은 관심 있는 물질 면과 평행한 방향으로 작용하는 응력 구성 요소

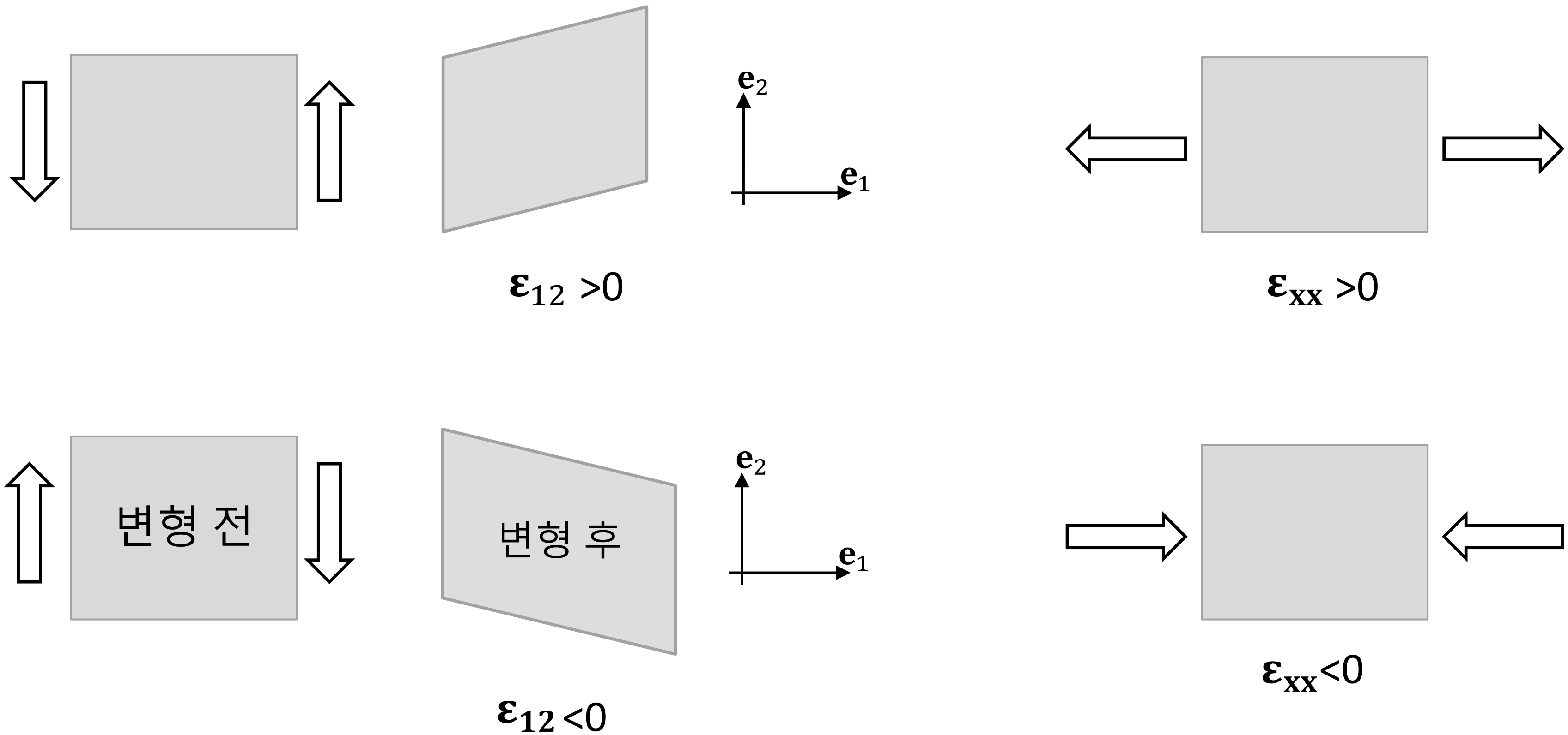
- 변형률 구성 성분 (strain component)
  - **수직 변형률 성분**(normal strain component)은 관심 있는 물질 '길이'가 본래의 그 길이 방향으로 얼만큼 인장 되거나, 압축되는 변형의 종류(요소)를 알려준다.
  - **전단 변형률 성분**(shear strain component)은 관심 있는 물질 '길이'가 본래의 그 길이 방향과 '수직' 방향으로 얼마나 변화하였는지 알려준다.





수직, 전단 성분과 sign

- 수직(normal)과 전단(shear)성분은 그 작용 방향에 따라 + 혹은 – 값을 가질 수 있다.



위에 쓰인 ε_{xy}, ε_{xx} 등의 notation은 텐서 표기법과 관련되어있다. 차후에 더욱 자세히 다룰 예정이다.

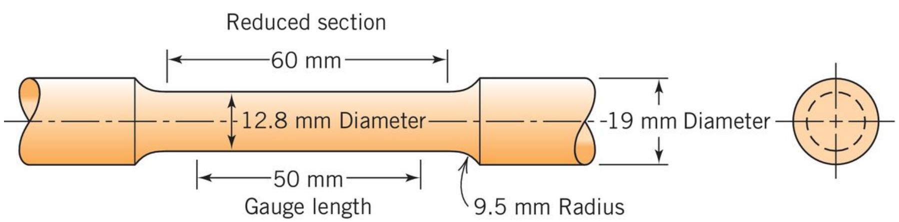
응력과 변형률의 실험 측정법

- 응력과 변형률을 측정하는 방법에 대해 간단히 의논해보자.
- Q. 일축 인장(uniaxial tension test; uniaxial tensile test)법에 대해 배웠는가?
- Q. 일축 인장에서는 어떤 기계적 성질들을 취득할 수 있는가?

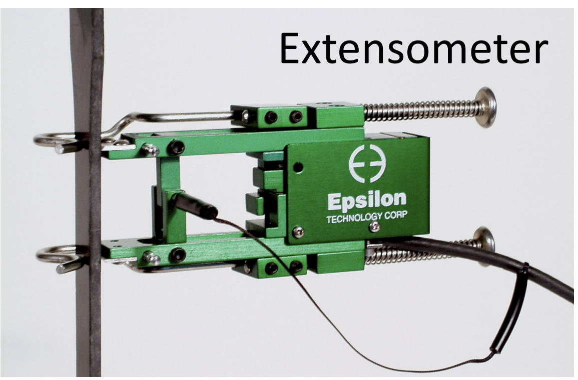
Tension tests

- (Uniaxial) tension test: the most common mechanical stress-strain test performed in **tension** (인장)
- 시편(specimen)은 주로 파괴(fracture)가 발생할 때가지 당겨진다.
- Dogbone 모양의 시편
- Load-cell: 시편에 가해진 force를 측정
- Extensometer: 시편의 길이 (elongation) 변화를 측정

Tensile tester



Load-cell



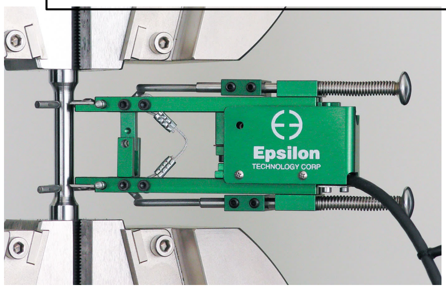
Extensometer

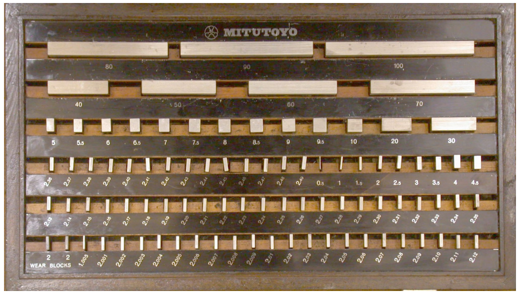
Images from Callister, Int. MSE

http://www.epsilontech.com/products/axial-extensometer-model-3542/

Measuring strains

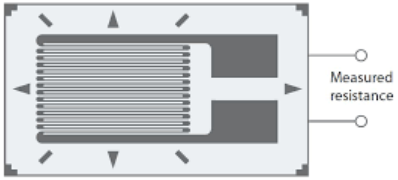
Measuring Relative motion of two points



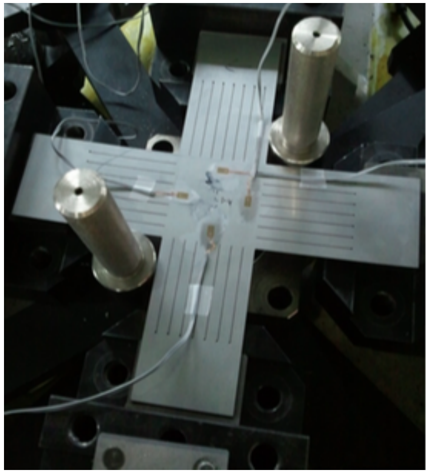


Mechanical extensometer and gauge blocks

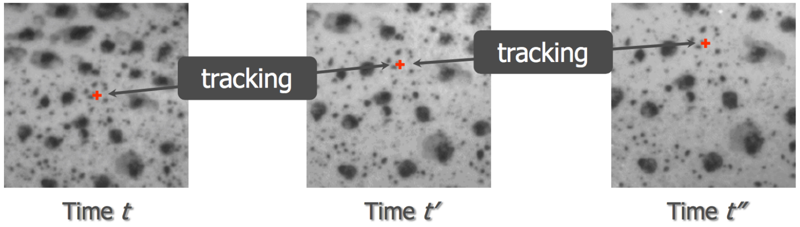
Strain pertaining to a smaller area (point)



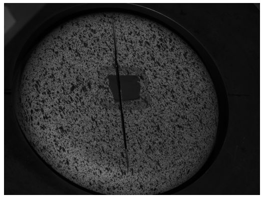
Strain gauge

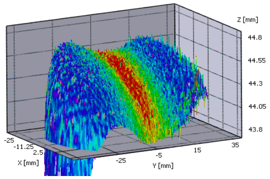


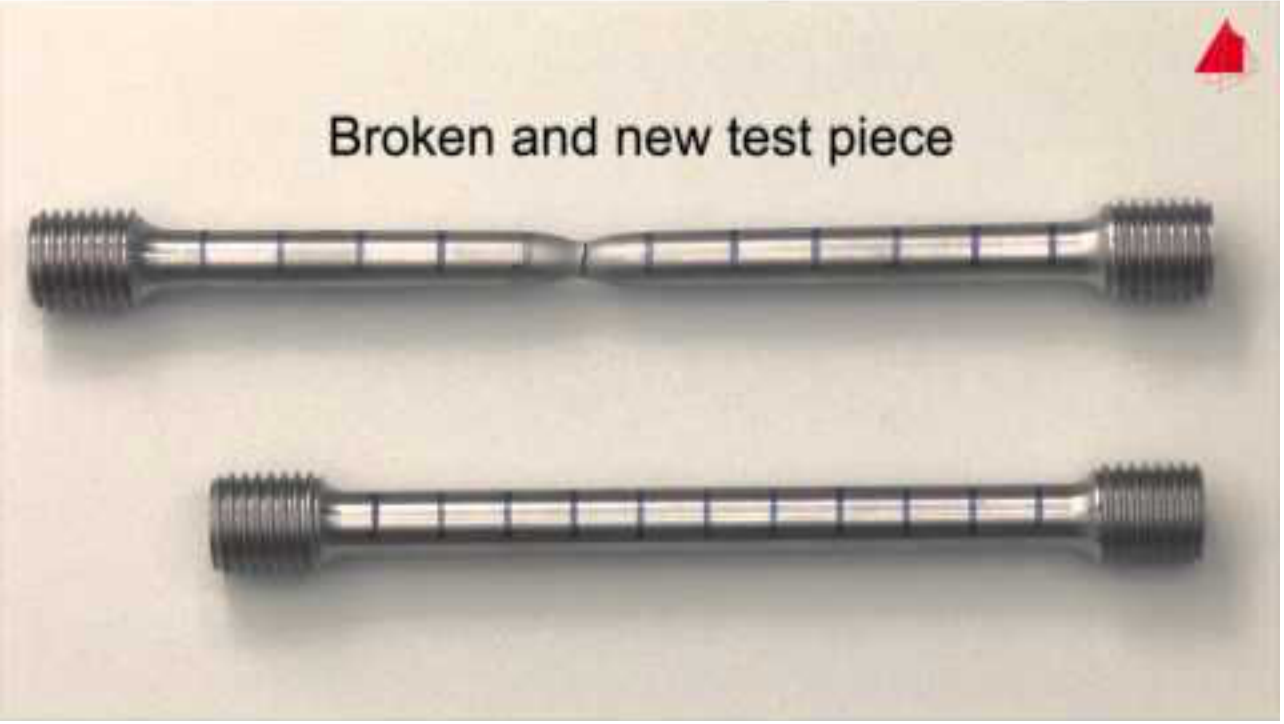
Strain field measurement (2D area)



Digital image correlation



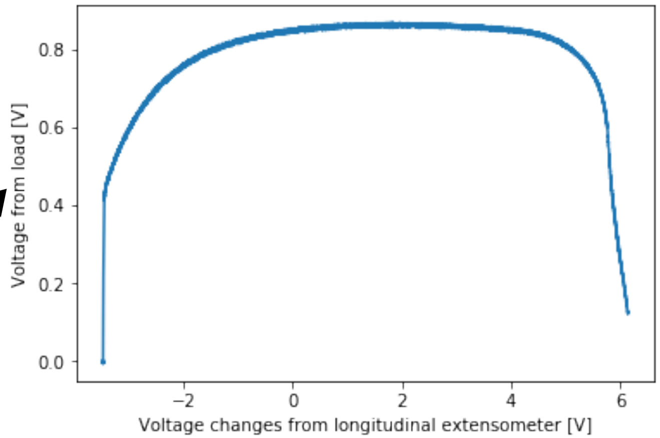




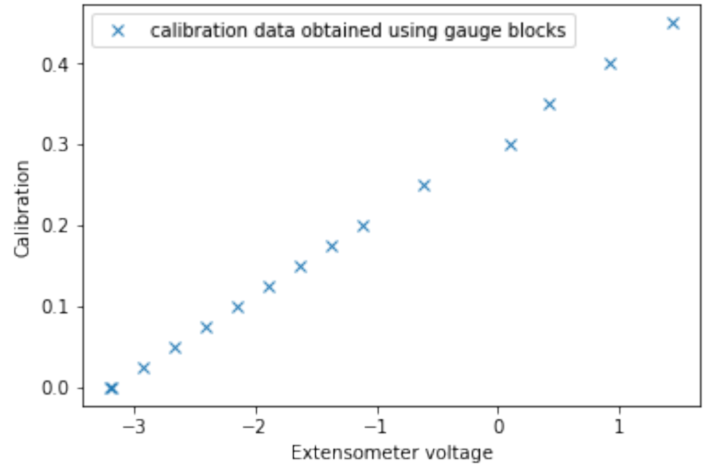
Channel name in youtube: MaterialsScience2000

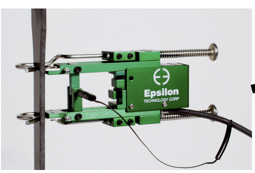
- Material with yield point
- Material without yield point

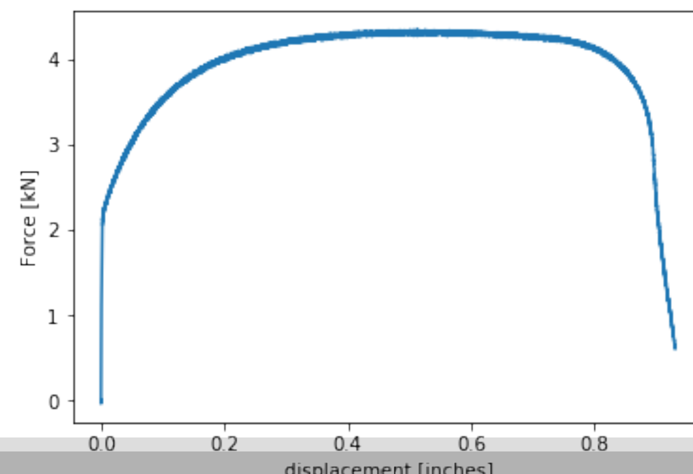
Tension tests



Calibration

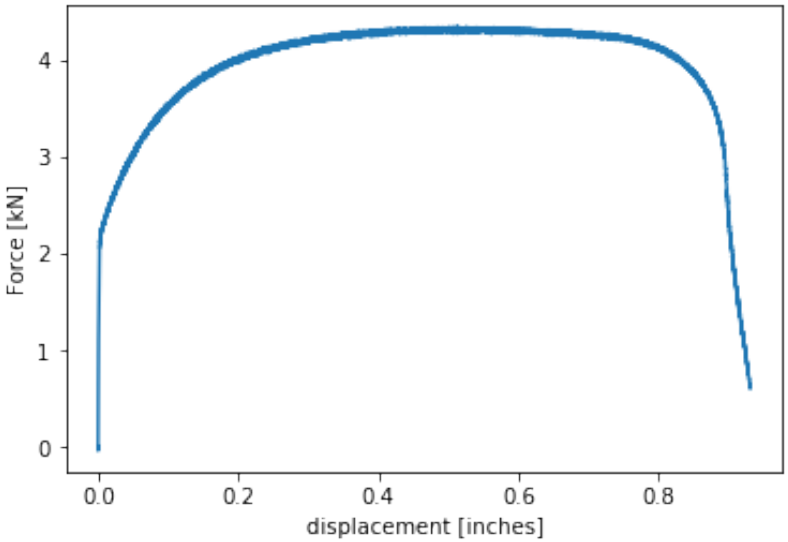






Load cell과 extensometer는 전기적 신호를 준다. 전기적 신호와 실제 physical quantity (Force 혹은 길이 변화)는 calibration을 통해 변환 시킨다.

Tension tests



- **Summary:**
  - Load-cell과 extensometer로 전기적 신호를 받아왔다.
  - Load-cell과 extensometer의 calibration 데이터를 통해 Force와 displacement로 변환하였다.
- Force and displacement는 시편의 크기에 따라 변한다. 따라서, 기계적 특성을 설명하는데 적절치 않다.
- 시편의 크기에 무관한 물리량으로 바꾸는 것이 필요

- 이렇게 시편의 크기(기하학적 요소)를 **최소화** (가능하다면 완전히 제거) 하기 위해서 응력과 변형률을 사용하여야 한다.
- Force와 displacement를 각각 응력과 변형률로 전환하여야 한다.

기하학적 요소 감소 (공칭 응력/변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 ****줄이는**** 가장 간편한 방법으로 engineering stress (공칭 응력)을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 ****줄이는**** 가장 간편한 방법은 engineering strain (공칭 변형률)을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{\mathrm{engi}} = \mathrm{F}/\mathrm{A}_0$$

F: 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N 혹은 kN 단위)
A_0: 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로 m^2 단위)

$$\epsilon = \frac{\mathrm{l_i} - \mathrm{l_0}}{\mathrm{l_0}} = \frac{\Delta \mathrm{l}}{\mathrm{l_0}}$$

$\mathrm{l_0}$: 시편에 하중이 가해지기 전의 길이
$\mathrm{l_i}$: 순간순간 변한 길이
변형률은 단위가 없다. (길이 단위가 상쇄되어 없어진다)
다만 공칭 변형률에 100을 곱해 %로 나타내기도 한다.

- **힘과 시편의 길이 변화 대신, 공칭 응력과 공칭 변형률을 사용함으로써 시편의 기하학적 요소를 어느정도 줄이는 효과를 얻을 수 있다.**

기하학적 요소 제거 (진응력/진변형률)

- 시편에 걸린 하중의 기하학적 요소를 ***제거***하는 방법으로 **true stress (진응력)**을 사용할 수 있다.
- 시편이 보여주는 모양의 변화에서 기하학적 요소를 ***제거***하는 방법으로 **true strain (진변형률)**을 사용할 수 있다.

$$\sigma^{\mathrm{true}} = F/A$$

F: 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N 혹은 kN)
A: 하중이 가해지는 시점에서의 시편 단면적 (주로 m^2 단위)

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

l: 시편에 하중가해지는 시점에서의 길이
dl: 하중이 가해지고 나서 매우 짧은 순간에 발생한 길이 변화 (infinitesimal)
dε: 하중이 가해지고 나서 매우 짧은 순간에 발생한 변형률 (infinitesimal)

- 위 진변형률은 순간순간 발생하는 변형률의 '변화량'을 사용하여 정의된다. 모양(길이) 변화가 발생하는 동안 나타난 진변형률 값을 더하면(적분) 모양 변화가 끝난 후(혹은 하중이 걸린 후)의 진정한 변화량을 얻을 수 있다. 여기서 진정한 변화량이란, 시편의 길이 형태 등 기하학적 요소가 완전히 제거된다는 의미.

- $$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{true}} = \int_{l_0}^{l_1} d\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1} \frac{1}{l} dl = \int_{l_0}^{l_1} d\ln(l) = \ln(l_1) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_0+\Delta l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \epsilon^{\mathrm{engi}}\right)$$

진변형률과 공칭 변형률 비교 (인장)

- 앞서, 공칭 변형률은 기하학적 요소를 '감소' 시키는데 그치는 반면, 진변형률은 기하학적 요소를 '제거'할 수 있다고 하였다. 다음의 예제로 그 둘을 비교하여 보자.

공칭 변형률: $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

진변형률: $\varepsilon = \ln(1+\epsilon)$

Step 0

초기 시편 길이가 10 mm

Step 1

봉상의 길이가 12 mm 가 되었다.

Step 2

봉상의 길이가 15 mm 가 되었다.

$$\epsilon = \frac{12mm - 10mm}{10\ mm} = 0.2$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = 0.1823\ ...$$

$$\epsilon = \frac{15mm - 12mm}{12\ mm} = 0.25$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = 0.2231\ ...$$

$$\epsilon = \frac{15mm - 10mm}{10\ mm} = 0.5$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = 0.4054\ ...$$

고찰

1. 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 그 값이 작다 (?).
2. 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다

압축과 인장 (tension and compression)

- 압축과 인장 모두 작용면에 수직방향으로 힘이 작용; 그 둘의 구분은 sign으로:
  - 인장은 힘과 변형률 positive value
  - 압축은 힘과 변형률이 negative value

- 대게 인장 실험이 압축 실험에 비해 용이하다.

Disk compression test is a popular method used to measure anisotropy of sheet metals

Fig. 4.4 Disk compression specimens for TWIP940 before (left) and after (right) deformation. The left one is original, the right one is deformed.

Xu Le, POSTECH, Doctoral Thesis 2011

진변형률과 공칭 변형률 비교 (압축)

공칭 변형률: $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

진변형률: $\varepsilon = \ln(1+\epsilon)$

초기 시편
길이가 10 mm

Step 0

봉상의 길이가
8 mm 가 되었다.

Step 1

봉상의 길이가
5 mm 가 되었다.

Step 2

$$\epsilon = \frac{8mm \ - 10mm}{10\ mm} = -0.2$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = -0.2231 \dots$$

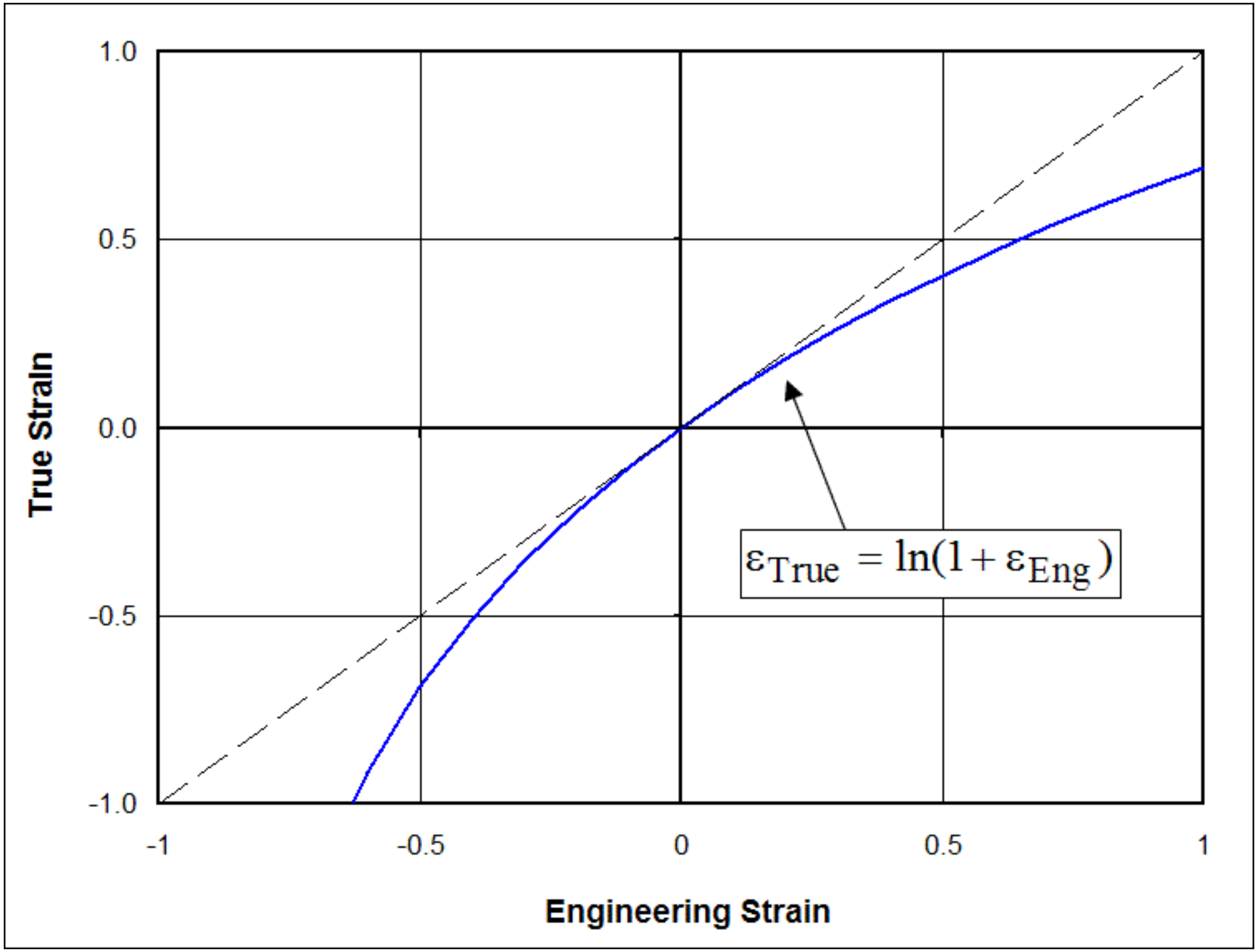
$$\epsilon = \frac{5mm \ - 8mm}{8\ mm} = -0.375$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = -0.4700\ \dots$$

$$\epsilon = \frac{5mm \ - 10mm}{10\ mm} = -0.5$$
$$\varepsilon = \ln(1+\epsilon) = -0.6931 \dots$$

고찰

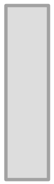
1. 진변형률의 경우 공칭 변형률보다 작다 (?).
2. 진변형률의 경우 단계별로 얻어진 변형률 값의 합이 전체변형률과 같다.

Compare engineering strain/true strain



http://www.continuummechanics.org/images/truestrain/true_vs_engineering.png

Example



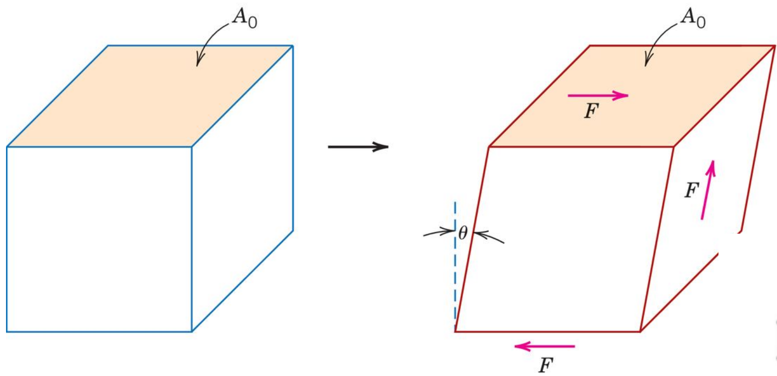
초기 시편
길이가 10 mm

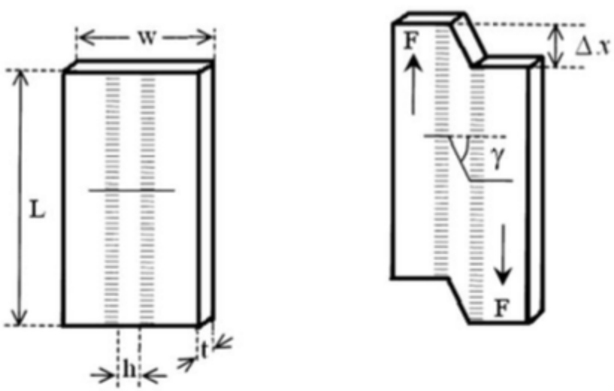
Step 0

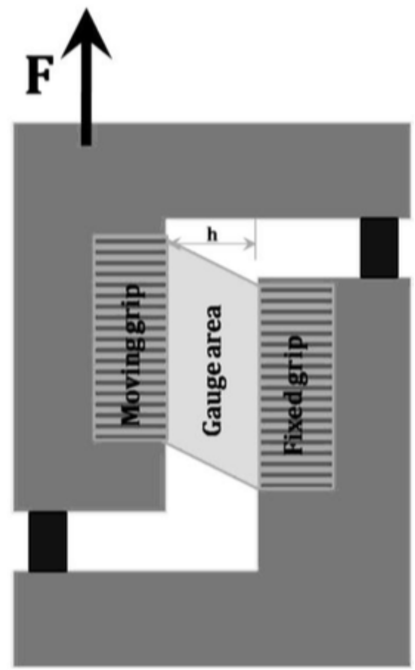
Q1. 공칭 변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

Q2. 진변형률이 -1이 되려면 해당 시편을 얼만큼의 길이로 압축하여야 하나?

전단 시험 (shear test)







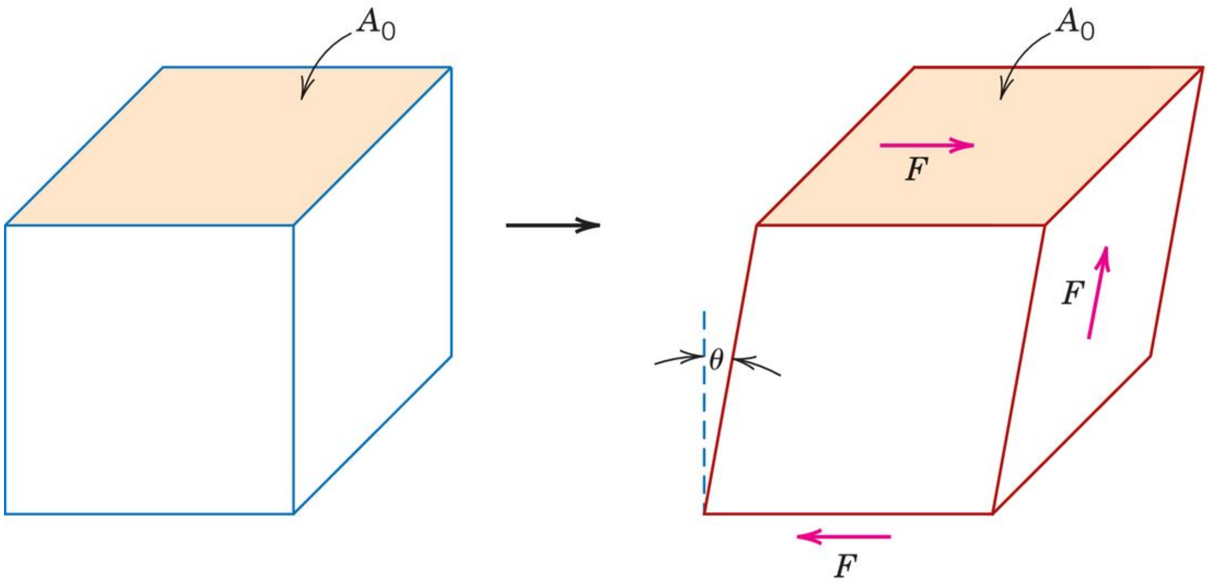
김효정, 포항공대 석사 학위 논문 (2010)

전단 시험 (shear test)

$$\tau = \frac{F}{A_0}$$

F: 시편에 가해진 하중 (힘, 주로 N, kN 단위 사용)
A_0: 하중이 가해지기 전의 시편 단면적 (주로 m^2 단위)

*전단력의 방향이 작용하는 면에 '누워' 있다.
- 인장이나 압축력(tensile or compressive force)의 방향은 작용하는 면과 '수직' 방향

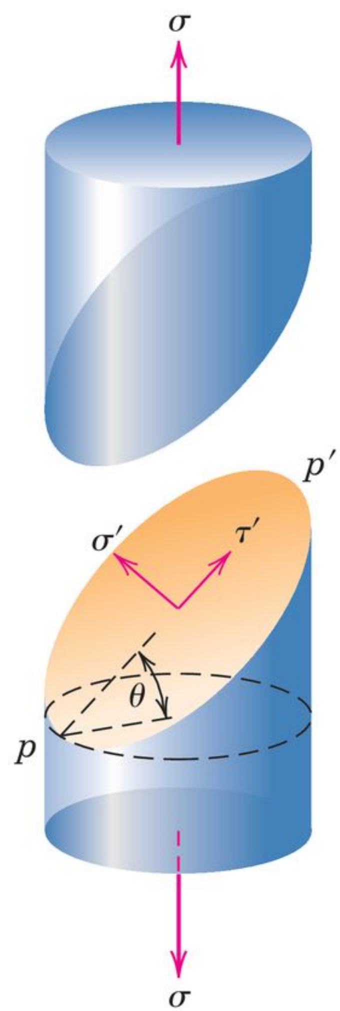


전단변형률 (γ)는 각도 θ와 밀접한 관계.

전단 변형으로 물체는 회전(spin)을 일으킬 수도 있다. 하지만 이러한 회전은 순수한 '변형'이 아니다. 따라서, 정확한 변형률을 구하기 위해서는 이러한 회전을 제외시킨다.

응력 상태의 기하학적 고려

- 이때까지 작용한 응력들은 특별한 케이스들로 국한되어있다
  - 응력이 작용한 면과 수직 (수직)
  - 응력이 작용한 면과 평행 (전단)
- 사실 일반적인 응력 상태는 위의 압축, 인장, 전단이 혼재한 상태이다. 따라서 응력 상태는 수직과 전단 성분들로 나누어 분석할 수 있다. 수직, 전단 성분들은 응력 상태를 나타낼 수 있는 구성 요소(component)라 할 수 있다.



<u>응력은 항상 특정 ‘면’에 작용한다는 점을 주지할 것.</u>

연속된 봉상내의 주황색의 가상 단면에 작용하는 응력의 상태를 살펴보자.

해당 면은 실제로 외부의 응력 $\boldsymbol{\sigma}$가 작용하고 있다.
하지만 해당 응력은 관심면과 ‘수직’ 이거나 ‘평행’하지 않다.

해당 면에 ‘수직’ 하고 ‘평행’한 성분을 찾아야 응력 상태를 명확히 정의할 수 있다.

탄성 변형

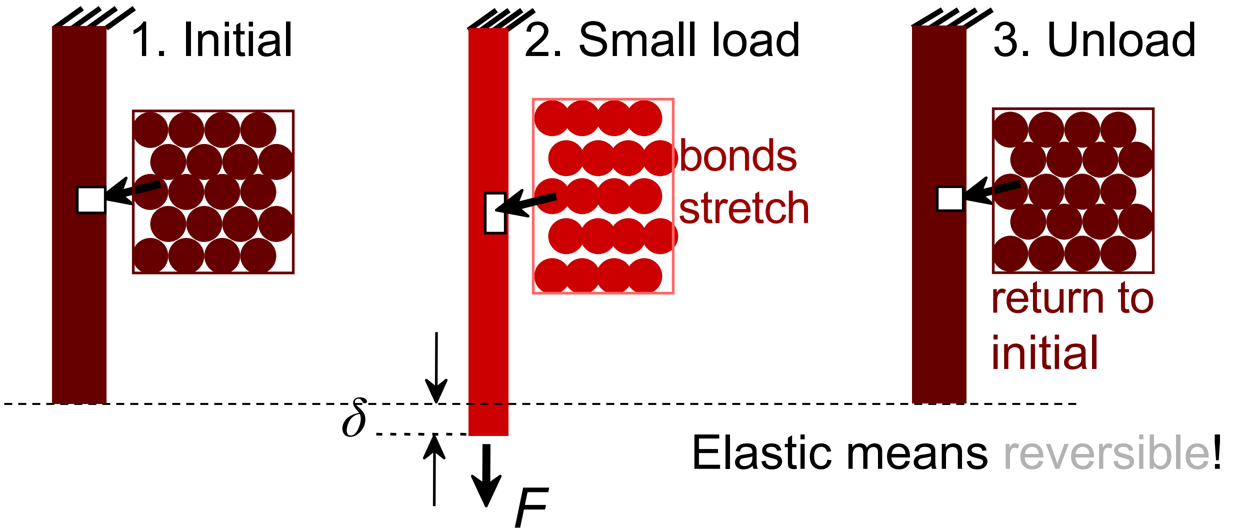
- 기계적 자극과 기계적 반응, 그리고 그 둘의 관계 (간단한 예: 금속의 탄성)
  - $\sigma = \mathbb{E}\varepsilon$ (σ: 응력 $\mathbb{E}$: elastic constants (modulus), ε: 변형률)
- 위는 금속의 탄성 구간에 적용이 가능. $\mathbb{E}$ 값은 양수. 따라서, 음의 응력을 가하면 음의 변형률이 얻어진다. 양의 응력이 점점 커질수록 양의 변형률이 점점 커진다.
- 위의 관계식은 Hooke’s law로 불린다. 비례 상수 $\mathbb{E}$ 는 다양한 이름으로 불린다:
  - Elastic modulus
  - Elastic Constants
  - Young’s modulus 등
- Hooke’s law의 $\mathbb{E}$는 해당 물질의 탄성 구간에서의 물성 (material property)이다. 따라서 재료마다 상이한 값을 가진다.
- 교재 227쪽 탄성 변형에 대한 정의는 틀렸다. 이는 다음 장에서 더 알아보자.

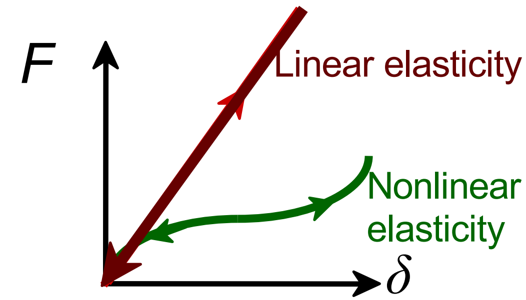
Elasticity (탄성): thought experiment

Let’s conduct a thought experiment as described below

1. Suppose you are pulling down a metallic specimen whose upper end is ‘fixed’

3. The pulling force decreases and eventually you let it go.





Elastic means reversible!

2. You are pulling the specimen harder and harder – meaning that the force at the lower end increase.

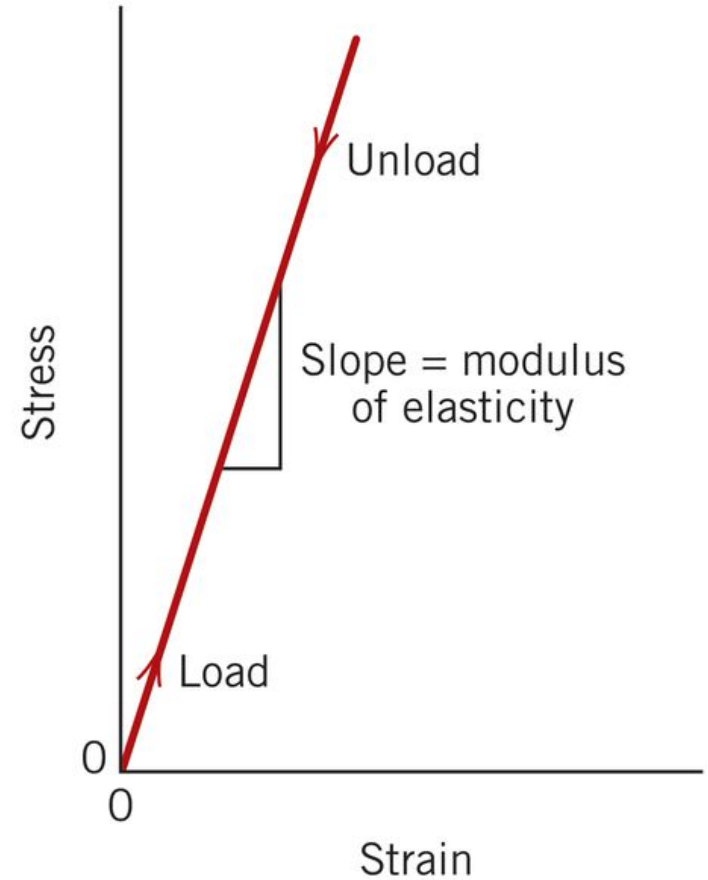
Usually metals show linear-elasticity

Non-linear elasticity is observed in polymers, rubbers

* 응력과 변형률이 (선형) 비례성이 탄성을 의미하지 않는다. 탄성은 작용응력이 제거된 후 작용 전으로의 모습으로 ‘복원’ 하느냐가 기준이다.

탄성 계수, 전단 계수

- **<u>탄성 계수</u>**𝔼는 normal component (즉 인장 혹은 압축 응력과 변형률) 사이에서의 비례상수
- 전단 계수는 shear component (즉 전단 응력과 전단 변형률)간의 비례상수
- Hooke's law에는 선형관계가 가정되어 있다. 거의 대부분의 금속은 탄성 구간에서 선형성을 나타낸다: 즉 응력과 전단 변형률이 서로 선형 비례한다.



탄성 변형률과 원자 결합력

- 앞서 살펴본 것과 같이 탄성 구간에서는 원자간의 거리가 외부의 힘에 의해 변하며, 원자간의 결합 거리가 늘어난 상태로 볼 수 있다.

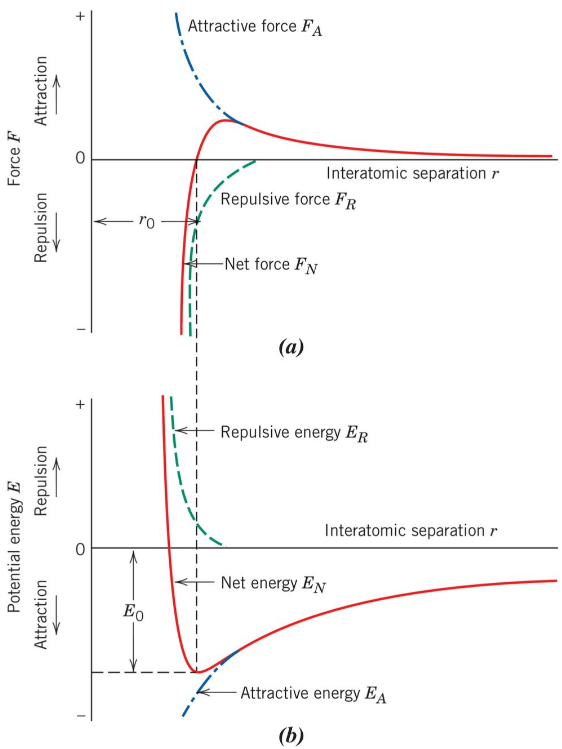
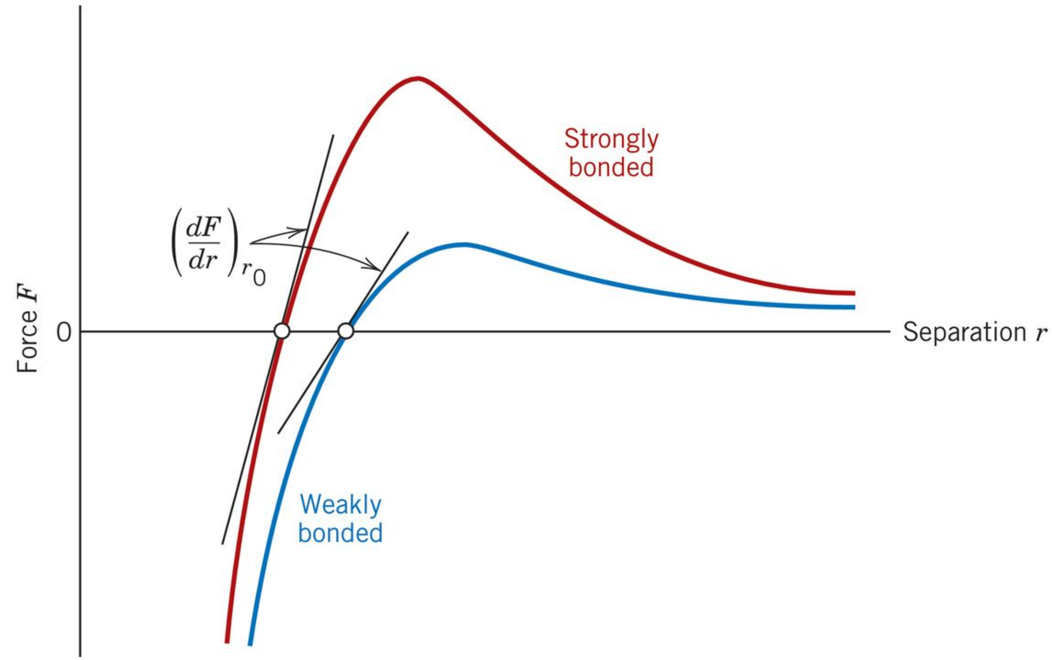


Fig. 2.10a



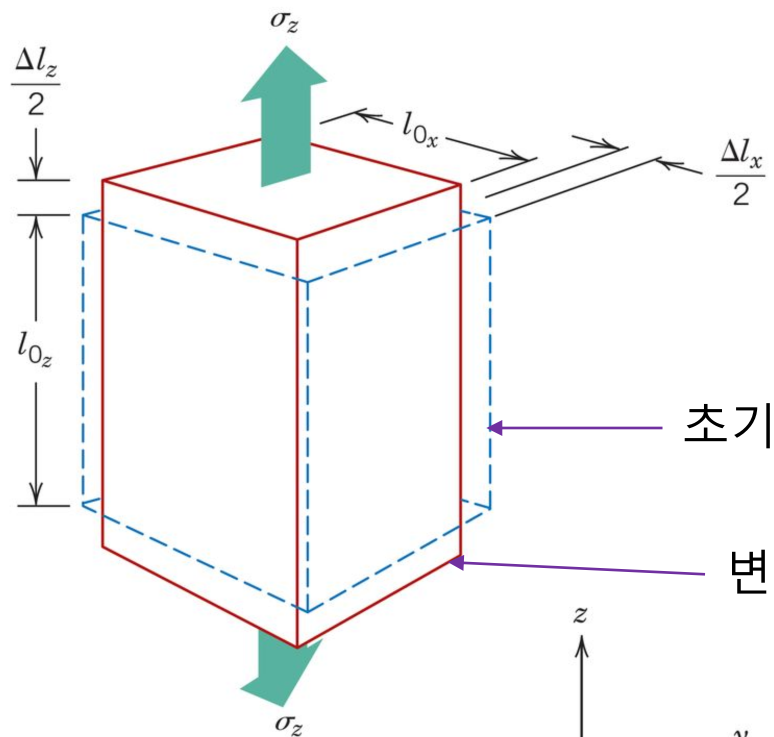
- 평형상태에서 원자 거리를 변화시킬 때 필요한 ‘힘’은 위의 그래프에서의 기울기 (이 기울기가 탄성 계수와 관계)
- 재료마다 해당 점에서의 기울기가 다를 수 있다 (각 재료의 특성)

Poisson ratio (푸아송 비) (ν; nu symbol)

축 방향으로 작용하는
일축 normal stress 방향에
의해서 해당 힘과 같은
방향으로만 변형이
일어나는 것이 아니라
그것과 '수직'으로도
변형이 발생한다.

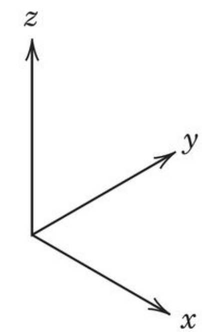
$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$$

z축 방향
인장시 $\varepsilon_y < 0$



초기 시편 모양

변형 후 시편 모양



$$\frac{\epsilon_z}{2} = \frac{\Delta l_z/2}{l_{0_z}}$$

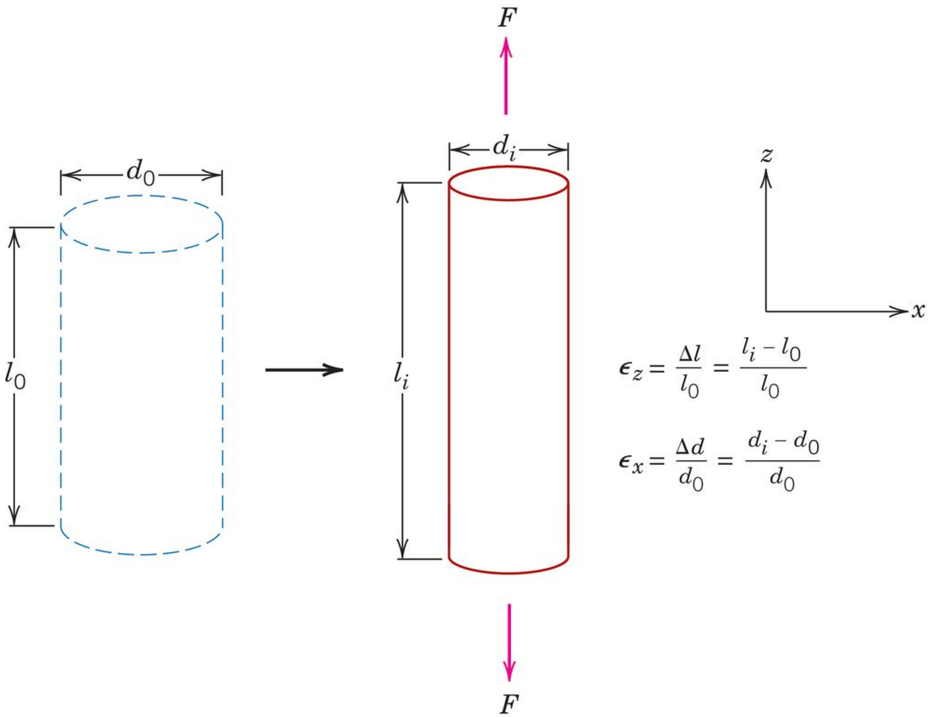
$$-\frac{\epsilon_x}{2} = \frac{\Delta l_x/2}{l_{0_x}}$$

등방성(isotropy) 가진 경우

Elasticity 예제

- 10mm의 지름을 가진 황동 막대에 장축 방향으로 인장 응력 작용시켜 지름을 $2.5\times10^{-3}mm$ 로 수축시키는데 필요한 하중 (힘)을 구하라. 변형은 완전 탄성으로 가정.

Metal Alloy	Modulus of Elasticity GPa	Shear Modulus GPa	Poisson's Ratio
Aluminum	69	25	0.33
Brass	97	37	0.34
Copper	110	46	0.34
Magnesium	45	17	0.29
Nickel	207	76	0.31
Steel	207	83	0.30
Titanium	107	45	0.34
Tungsten	407	160	0.28



$$F = \sigma A_0 = \sigma \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 \pi \quad (1)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = 0.34 \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{-2.5\times10^{-3}}{10} \quad (3)$$

With (2) and (3), you'll get ε_z

Knowing $\mathbb{E}$ andε_z you can get the stress

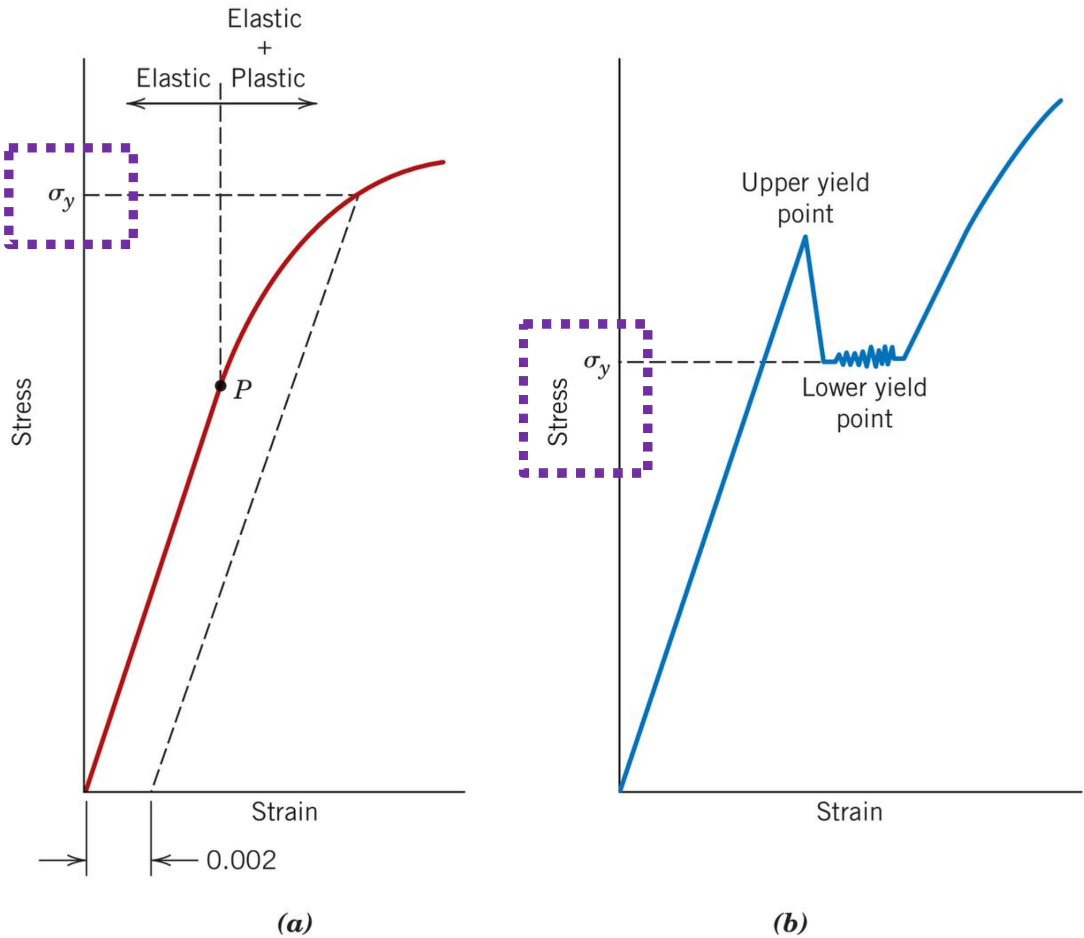
$$\sigma = \mathbb{E}\varepsilon_z$$

Using (1), you can obtain the force.

소성 변형 (plastic deformation)

- 대부분의 금속 재료는 약 0.005 정도의 변형율까지만 탄성을 유지. 이후에는 작용 응력이 제거된 이후에도 완벽히 회복되지 않는다.
- 탄성 구간에서 선형적인 관계를 보이던 응력과 변형률의 관계도 비선형이 된다.
- 따라서 Hooke's is not valid any more.
- 작용 응력이 제거된 이후에도 남아 있는 변형을 소성 변형이라 일컫는다.

- Proportional limits
- 0.002 offset (수평이동법) – 항복 강도 정의
- Yield point phenomena (more details in next slide)

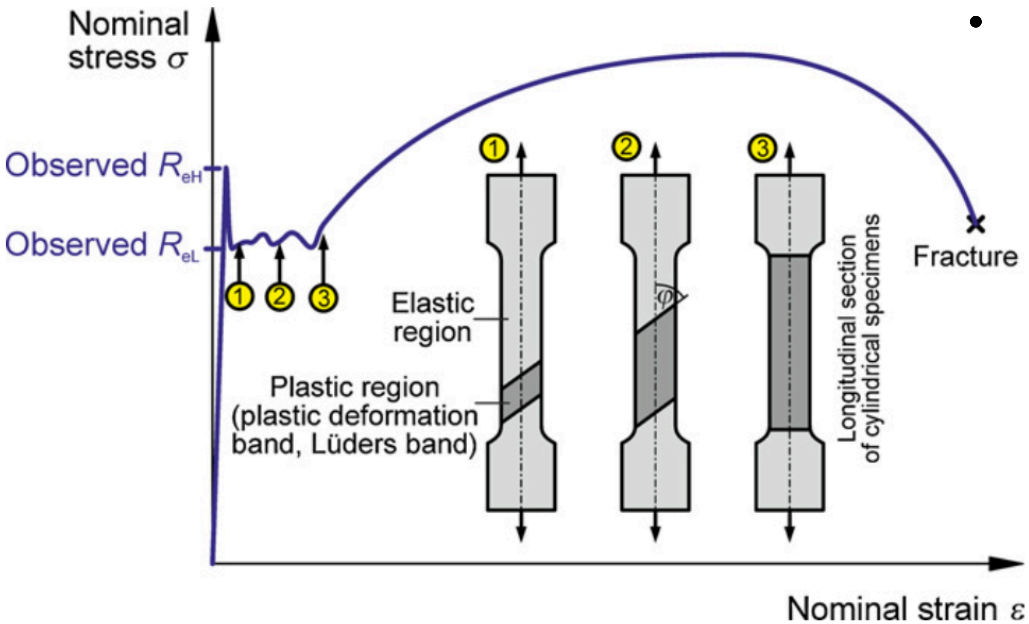


Smooth transition

Yield point phenomenon

Yield point phenomenon in mild steels

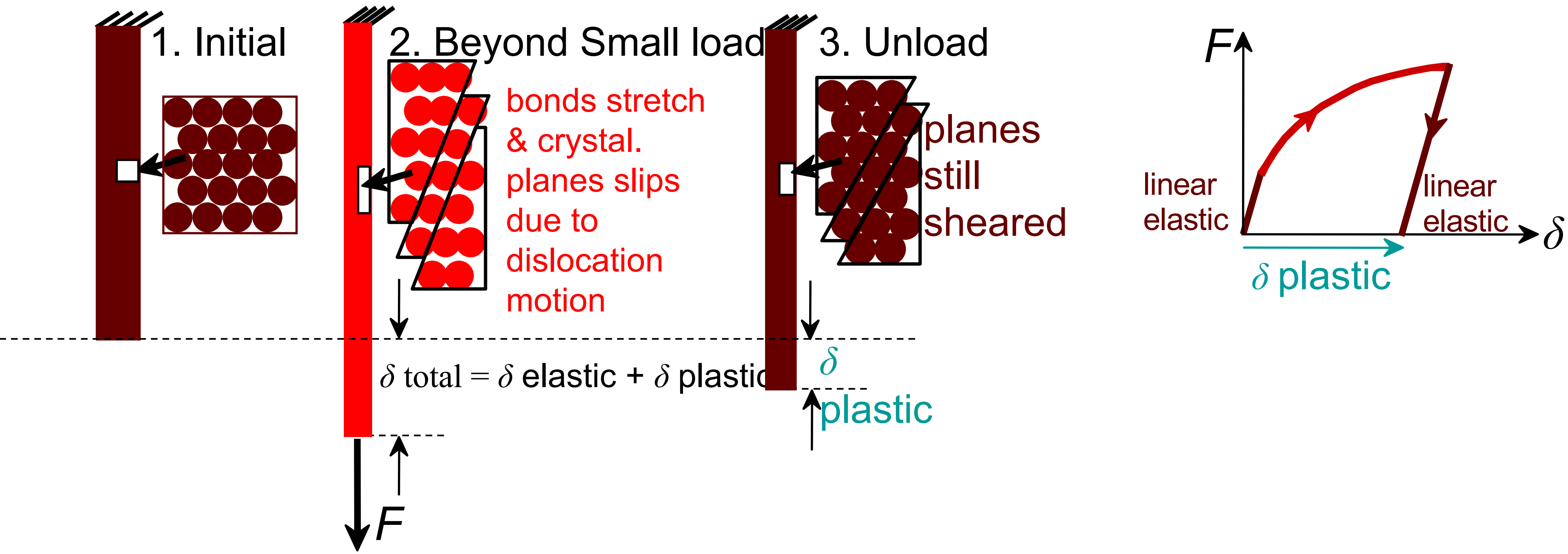
- Lüders band
- Upper and lower yield points



- *Schwab and Ruff, Act Materialia 62, 2013 p 1798-1808*
- *(Luders bands image from https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/metal-forming-3/plane_stress.php) - which is originally contributed by Mike Meier, University of California, Davis*

Plasticity (소성): thought experiment

Let’s conduct a similar thought experiment with an increased magnitude of force

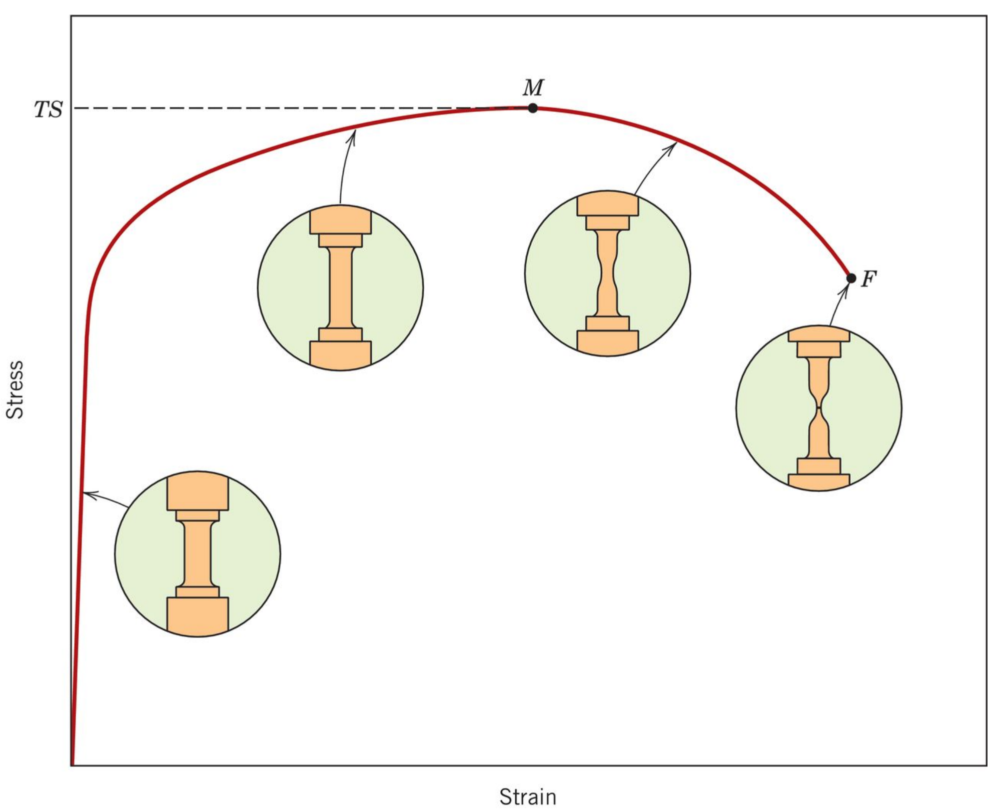


Even after the external load is removed, the material does not **fully** recover to its original shape.

Plastic means permanent!

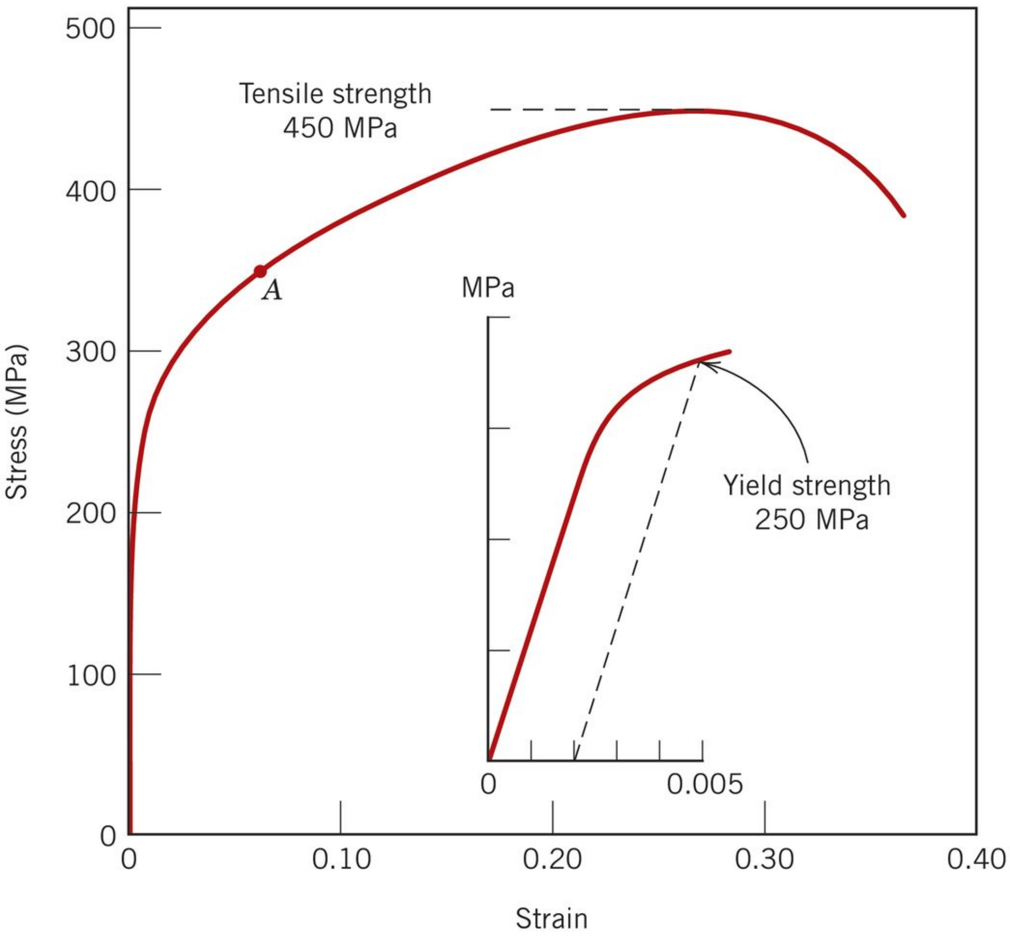
인장 강도 (tensile strength, tensile stress)

- 교재는 strength와 stress를 구분 – 물성의 경우 강도(strength)를 사용. 하지만 해당 과목에서는 뚜렷이 구분하지 않겠다 – since the exact meaning of the term may depend on whom you are talking to.



- 소성 변형후 계속적으로 소성 변형을 일으키기 위해서는 응력이 증가하여야 한다. 이렇게 계속적으로 소성 변형을 일으키는 응력을 유동응력(flow stress)이라 한다.
- 공칭 응력/공칭 변형률 커브에서 최대점의 공칭 응력을 TS라 한다. TS를 지나면 flow stress가 감소, 최종적으로 파괴에 이른다 (F).
- TS까지는 균일한(homogeneous) 변형. 그이후로는 한부분에 변형이 집중되고 이로 인해, 한 부분의 폭이 수축되는 현상(necking) 발생.
- 구조재는 탄성 변형 구간내에서 주어진 하중을 견뎌야 한다.

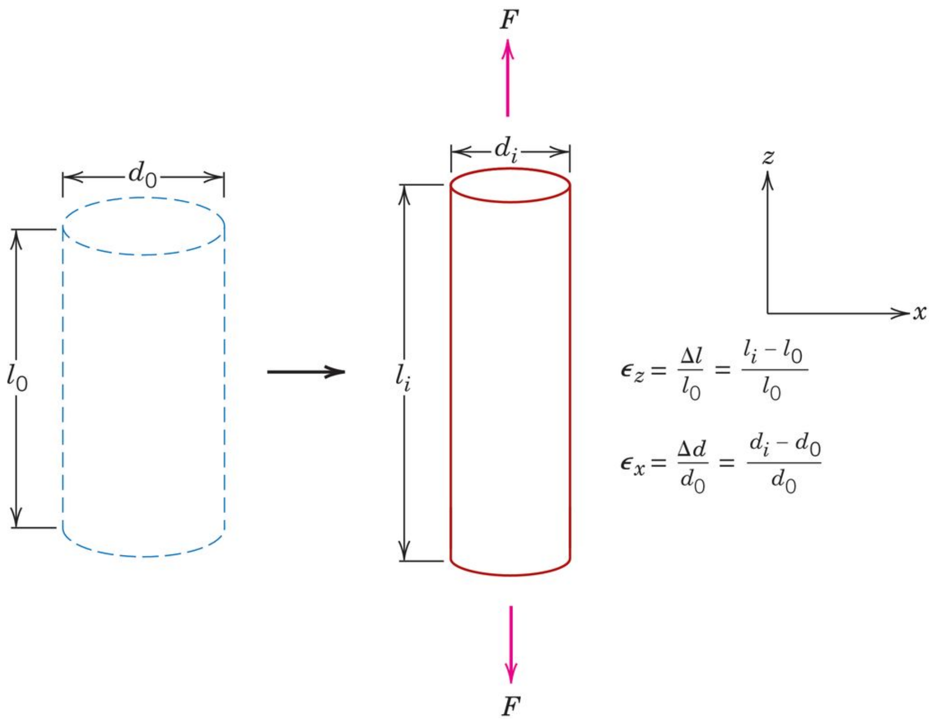
How to extract mechanical properties from stress-strain curve



YS, TS, $\mathbb{E}$.

* You should be able to graphically illustrate how to obtain these properties.

Force required upon plastic yielding



Suppose that the yield stress of the material is 300 MPa (=300×10^6Pa).

- Q1. If the initial diameter $D_0 = 10$ [mm], how much force is required for this material to yield, provided that the yield stress of 300 MPa is an 'engineering' quantity.

- Q2. Repeat Q1 for the conditions that the yield stress of 300 MPa is an 'true' quantity and the Poisson ratio is 0.3.

- Q3. How different is the answers to A1 and Q2, and why is that so?

An elegant way to express this?

- You have imposed a stress state,
- You have to separately calculate the strains along loading axis and the lateral strain.
- It'd be much nicer if we can do it in a more systematic way – with (seemingly) a single equation…

- Isotropic constitutive law:
- $\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}: \boldsymbol{\varepsilon}$
- with $\mathbb{C}_{ijkl}$ being the elastic modulus herein. For the case of isotropic elasticity,
- $\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. λ: Lame's first parameter μ: Shear modulus
- With the above, the Hooke's law can be more explicitly expressed as:
- $\sigma_{ij} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}\varepsilon_{kl}$

How to use?

$$\sigma_{ij} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}\varepsilon_{kl}$$

For uniaxial tension with $\sigma_{11} = 100\ [MPa]$, what strains?

$$\sigma_{11} = 100 = \{\lambda\delta_{11}\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{1l} + \delta_{1l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{12} = 0 = \{\lambda\delta_{12}\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{2l} + \delta_{1l}\delta_{2k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{13} = 0 = \{\lambda\delta_{13}\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{2l} + \delta_{1l}\delta_{3k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{21} = 0 = \{\lambda\delta_{21}\delta_{kl} + \mu(\delta_{2k}\delta_{1l} + \delta_{2l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{22} = 0 = \{\lambda\delta_{22}\delta_{kl} + \mu(\delta_{2k}\delta_{2l} + \delta_{2l}\delta_{2k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{23} = 0 = \{\lambda\delta_{23}\delta_{kl} + \mu(\delta_{2k}\delta_{3l} + \delta_{2l}\delta_{3k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{31} = 0 = \{\lambda\delta_{31}\delta_{kl} + \mu(\delta_{3k}\delta_{1l} + \delta_{3l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{32} = 0 = \{\lambda\delta_{32}\delta_{kl} + \mu(\delta_{3k}\delta_{1l} + \delta_{3l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{33} = 0 = \{\lambda\delta_{33}\delta_{kl} + \mu(\delta_{3k}\delta_{3l} + \delta_{3l}\delta_{3k})\}\varepsilon_{kl}$$

How to use?

$$\sigma_{ij} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}\varepsilon_{kl}$$

For uniaxial tension with $\sigma_{11} = 100\ [MPa]$, what strains?

$$\sigma_{11} = 100 = \{\lambda\delta_{11}\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{1l} + \delta_{1l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$
$$\rightarrow\ 100 = \{3\lambda\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{1l} + \delta_{1l}\delta_{1k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$For, \sigma_{12}, 0 = \{\lambda\delta_{12}\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{2l} + \delta_{1l}\delta_{2k})\}\varepsilon_{kl} \rightarrow 0 = \{\lambda\delta_{kl} + \mu(\delta_{1k}\delta_{2l} + \delta_{1l}\delta_{2k})\}\varepsilon_{kl}$$

$$\rightarrow 0 = \left[\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} + \mu\left\{\sum_k\left(\sum_l \delta_{1k}\delta_{2l}\varepsilon_{kl} + \delta_{1l}\delta_{2k}\varepsilon_{kl}\right)\right\}\right]$$

$$\rightarrow 0 = \left[\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} + \mu\left\{\sum_k(\delta_{1k}\delta_{21}\varepsilon_{k1} + \delta_{11}\delta_{2k}\varepsilon_{k1} + \delta_{1k}\delta_{22}\varepsilon_{k2} + \delta_{12}\delta_{2k}\varepsilon_{k2} + \delta_{1k}\delta_{23}\varepsilon_{k3} + \delta_{1l}\delta_{2k}\varepsilon_{k3})\right\}\right]$$

$$\rightarrow 0 = \left[\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} + \mu\left\{\sum_k(\delta_{11}\delta_{2k}\varepsilon_{k1} + \delta_{1k}\delta_{22}\varepsilon_{k2})\right\}\right] \quad \rightarrow 0 = \left[\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} + 3\mu(\delta_{11}\varepsilon_{12} + \delta_{22}\varepsilon_{21})\right]$$

$$\rightarrow 0 = [\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\mu(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})]$$